DAS GRENZGEBIET DER ELEMENTAREN UND HÖHEREN MATHEMATIK

IN AUSGEWÄHLTEN KAPITELN DARGESTELLT

VON

DR. K. KOMMERELL

O. PROF. A. D. U. TÜBINGEN

Mit 110 Figuren

1936

K. F. KOEHLER VERLAG / LEIPZIG

Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung, ausdrücklich vorbehalten
Copyright 1936 by K. F. Koehler Verlag, Leipzig
Printed in Germany

Druck der Offizin Haag-Drugulin in Leipzig

Vorwort

Das vorliegende Buch enthält als erstes Kapitel den Inhalt eines kleinen Heftes, das 1922 als Beiheft zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht mit dem Titel „der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik" erschienen war und schon längere Zeit vergriffen ist. Das Vorwort von damals gilt zum größten Teil auch für das nun in mancher Richtung erweiterte Buch. Dort hieß es: „Das vorliegende Heft ist aus Vorträgen hervorgegangen, die ich die letzten Jahre in Fortbildungskursen für höhere Lehrer Württembergs zu Stuttgart und Tübingen gehalten habe. Da ich von verschiedenen Seiten darum gebeten wurde, diese Vorträge, die man auch als Lehrproben bezeichnen könnte, weiteren Kreisen zugänglich zu machen, so möge dies in erweiterter Form hier geschehen. Da heute wohl in allen Schulen, die auf die Hochschule vorbereiten, infinitesimale Methoden mehr oder weniger im Unterricht behandelt werden, so ist es ausgeschlossen, daß die Elementarmathematik überall da, wo Grenzwerte in Frage kommen, denselben wie bisher fast systematisch ausweicht. Vielmehr muß jede Gelegenheit, die der Vorbereitung für die späteren Gedankenreihen dienlich sein kann, vollständig ausgenützt werden, soweit es die Fassungskraft und die Reife des Schülers zuläßt." „Wenn diese Schrift etwas zur Vertiefung des Unterrichts beitragen würde, so wäre ihr Zweck erreicht. Vielleicht mag auch mancher Studierende und dieser oder jener begabtere Schüler aus der Schrift Anregung erhalten."

An den letzten Satz möchte ich anknüpfen, um das nun weiter gesteckte Ziel dieses Buches zu begründen. Man hört beim gemütlichen Zusammensein mit seinen Studenten oft die Frage laut werden, warum der künftige Mathematiklehrer mit so ungeheuer vielen Theorien auf der Hochschule vertraut gemacht werde, mit einem Stoff überladen werde, von dem er zum allergeringsten Teile später seinen Schülern etwas mitteilen könnte. Auf der Hochschule werde nur höhere Mathematik getrieben, während der Schulunterricht es fast nur mit der elementaren Mathematik zu tun habe. Darum habe ich es unternommen, das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik ausführlich zu bearbeiten, einmal um zu zeigen, daß eigentlich zwischen beiden gar kein Unterschied besteht, daß es Probleme gibt, die zunächst elementar

erscheinen, aber weiter verfolgt, recht tief in höhere Gebiete hereinführen. Insbesondere aber wollte ich zeigen, daß ein Lehrer, der gewillt ist, an der Schule einen gründlichen und wohlaufgebauten Unterricht zu geben, der auch seinen Schülern ein Gefühl für strenge Beweisführung aneignen möchte, selbst nicht gründlich genug ausgebildet sein kann. Ja, der Lehrer an der Mittelschule hat es vielfach schwerer als der Hochschullehrer. Jener muß nach Methoden suchen, die einfach, leichtfaßlich und doch streng sind, während auf der Hochschule der erste Gesichtspunkt nebensächlich ist und oft kaum beachtet wird. Ich habe in jenem Büchlein gesagt: „Die Mathematik der Mittelschule ist Mathematik mit vereinfachten und beschränkten Hilfsmitteln." In der Lehrbuchliteratur unserer Tage, soweit sie die Mittelschule betrifft, sieht man gegenüber früheren Jahrzehnten einen höchst erfreulichen Fortschritt sowohl bezüglich des Inhalts, der Stoffgliederung wie der Methodik. Dieser Fortschritt konnte aber nur von wohlausgebildeten Mathematikern geleistet werden, die ihre Wissenschaft ihrem Werden und ihrem Wesen nach gründlich kennen. Nimmt sich darum der Student die Mühe, dieses Buch einmal hauptsächlich nach den Methoden, die ich zu einem guten Teil selbst aus didaktischem Bedürfnis heraus ersonnen habe, anzusehen, so wird er jene Frage gewiß nicht wiederholen. Bei der Abfassung des Buches habe ich aber auch an den Mathematiklehrer an den höheren Schulen gedacht. Der jahrelange Gang durch relativ eng begrenztes Gebiet stumpft ab, Abwechslung im Stoff und in der Methode regt an und wirkt erfrischend. So würde es mich freuen, wenn dieser oder jener Lehrer aus dem Büchlein Anregung erhalten könnte. Das eine oder andere Thema dürfte auch zur Behandlung in Arbeitsgemeinschaften oder für Lehrproben geeignet sein.

Was den Stoff selbst betrifft, so gibt das ausführliche Inhaltsverzeichnis genügend Auskunft. Aus der Zielsetzung des Buches heraus ist es auch zu verstehen, daß dann und wann „Grenzüberschreitungen", ja sogar beträchtliche, vorgekommen sind. Als Beispiel führe ich die schönen Untersuchungen aus dem Nachlaß von *Gauß* über das arithmetisch-geometrische Mittel an, das sich als Krönung der elementaren Betrachtungen über dieses Thema darstellt, oder die *Lorentz*gruppe mit der speziellen Relativitätstheorie. Die Kettenbrüche habe ich nach dem Vorgange von *Klein*, aber in anderer Weise, geometrisch dargestellt; während nämlich *Klein* vom Kettenbruch ausgeht und ihn dann in der bekannten Weise geometrisch deutet, ist bei mir der Ausgangspunkt die diophantische Gleichung $a\,x - b\,y = 1$. Die geometrische Lösung dieser Gleichung führt elementar zu den Kettenbrüchen; außerdem erhält man durch höchst einfache geometrische Betrachtungen ihre wichtigsten Eigenschaften, so daß dieses Gebiet dem elementaren Unterricht zugänglich wird.

Noch darf ich auf den Paragraphen über das reguläre Siebzehneck hinweisen, wo die elementare Darstellung mit der klassischen Theorie

von *Gauß* aufs engste verknüpft erscheint und in die elegante Konstruktion von *Richmond* ausmündet.

Es würde mich freuen, wenn diesem Buch das gleiche Wohlwollen entgegengebracht würde wie einst dem Büchlein, aus dem es hervorgegangen ist.

Herzlichen Dank sage ich meinem lieben Vetter und Mitarbeiter, Herrn Prof. Dr. V. Kommerell, Oberstudiendirektor i. R., und Herrn Dr. Garten, die mich beim Lesen der Korrekturen unterstützt haben.

Besonderer Dank gebührt auch der Verlagsbuchhandlung, die in schwierigen Zeiten das Buch verlegt und keine Mühe gescheut hat, das Buch würdig auszustatten.

Tübingen, den 1. Juni 1936. *K. Kommerell*

Inhalt

I. Kapitel. Der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik

Seite

§ 1. Die Wurzelgrößen. Ausziehen einer Quadratwurzel nach Heron. Pythagoreische Dreiecke 1
§ 2. Berechnung beliebiger Wurzelgrößen 14
§ 3. Berechnung von Numerus und Logarithmus mit Hilfe der Quadratzahlentabelle 18
§ 4. Berechnung der Zahl π nach Cusanus 21
§ 5. Huygens: „De circuli magnitudine inventa." Die Formeln von Huygens 28
§ 6. Approximation der Kreisperipherie durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige Vielecke 34
§ 7. Elementare Berechnung der zyklometrischen und trigonometrischen Funktionen 38
§ 8. Untersuchungen aus dem Nachlaß von Gauß 44
§ 9. Nachlaß von Gauß über das arithmetisch-geometrische Mittel 50
§ 10. Berechnung der reellen Periode des elliptischen Integrals 1. Gattung durch das agM nach Gauß 52
§ 11. Berechnung des unbestimmten elliptischen Integrals 1. Gattung durch das agM nach Gauß 55
§ 12. Diophantische Gleichung $a x - b y = 1$. Geometrische Betrachtungen 59
§ 13. Analytische Auflösung der diophantischen Gleichung $a x - b y = 1$ 65
§ 14. Die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche geometrisch abgeleitet 70
§ 15. Unendliche Kettenbrüche. Rationale und irrationale Zahlen . . . 76
§ 16. Die transzendenten Zahlen von Liouville 78
§ 17. Das Messen. Der Proportionallehrsatz. Flächenmessung 82
§ 18. Proportionenlehre ohne Stetigkeitsbetrachtungen 92
§ 19. Quadratur der Parabel. Summe der Quadrat- und Kubikzahlen. Der Satz von Fermat 102

II. Kapitel. Geometrische Transformationen

§ 20. Die Abbildung durch reziproke Radienvektoren (Inversion) 109
§ 21. Zusammenhang der Inversion mit der stereographischen Projektion der Kugel 116
§ 22. Die Zirkelkonstruktionen von Mascheroni 118
§ 23. Anallagmatische Kurven und Flächen 121

Seite

§ 24. Elementargeometrische Behandlung der Dupinschen Zykliden 123
§ 25. Die Methode der Zentralprojektion 143
§ 26. Beispiele zur Zentralprojektion. Photogrammetrie 153
§ 27. Die allgemeine Kollineation 161
§ 28. Die Lorentztransformation und die spezielle Relativitätstheorie 169
§ 29. Der Satz von Ivory und die deformierbaren Hyperboloide von O. Henrici 176
§ 30. Der Darboux-Königsche Planigraph und die Hyperboloide von O. Henrici 179
§ 31. Die deformierbaren Kreisschnittmodelle der Flächen zweiter Ordnung von A. Brill 185
§ 32. Die Spiraltransformation. Konische Spirale 189
§ 33. Die Fokalkegelschnitte 194

III. Kapitel. Vektorrechnung und Algebra

§ 34. Die Eulersche Formel. Die Cayleyschen Gleichungen 201
§ 35. Umkreisradius eines sphärischen Dreiecks 204
§ 36. Vektorielle Begründung der sphärischen Trigonometrie 207
§ 37. Elementare Begründung der sphärischen Trigonometrie für Eulersche und Möbiussche Dreiecke 214
§ 38. Kürzester Abstand von zwei windschiefen Geraden 218
§ 39. Verallgemeinerung des Ellipsenzirkels 219
§ 40. Linienkoordinaten. Das Nullsystem. Vektorsysteme. Zentralachse eines Vektorsystems 221
§ 41. Die Schraubenachse einer beliebigen Bewegung 233
§ 42. Die Gleichungen dritten und vierten Grades 235
§ 43. Elementargeometrische Konstruktion des regulären Siebzehnecks . . . 237

I. Kapitel

Der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik

§ 1. Die Wurzelgrößen. Ausziehen einer Quadratwurzel nach Heron. Pythagoreische Dreiecke

Die Wurzellehre des elementaren Unterrichts mit den oft merkwürdigen Wurzeln ist fast nur ein Formalismus. Die Zahlen, mit denen gerechnet wird, sind in ihrer Existenz, abgesehen vielleicht von den Quadratwurzeln, gar nicht sichergestellt, noch weniger wird angegeben, wie diese Zahlen berechnet werden können. So ist im Bewußtsein der meisten Schüler die Wurzellehre ein Algorithmus mit Symbolen, die für ihn fast bedeutungslos sind. Man sagt freilich, daß nachher, wenn man im Besitz der Logarithmen ist, alle diese Größen spielend berechnet werden können. Was geschieht aber nun, wenn wirklich die Logarithmen eingeführt werden? Man definiert: log 2 ist sehr nahe gleich 0,301, weil die 1000te Wurzel aus 10^{301} nahezu 2 gibt. Damit kann aber der Schüler nur dann etwas anfangen, wenn ihm durch wirkliches Ausrechnen der genannten Operationen die Richtigkeit der Behauptung erwiesen wird. Daß dies leicht und durchaus elementar geschehen kann, soll unten in § 3 gezeigt werden. Geschieht dies aber nicht, was meist wohl der Fall ist, dann liegt ein verhängnisvoller Zirkel vor, und dem Schüler bleibt alles dunkel. Daher kommt wohl auch die Tatsache, daß früheren Gymnasiasten als der Gipfel mathematischer Weisheit die Logarithmen erscheinen, zumal da auch die Berechnung der Logarithmen in den meisten Fällen unterbleibt. Es wird dem Schüler die Logarithmentafel mit den Worten in die Hände gedrückt, daß berühmte Männer einmal diese Zahlen berechnet haben. Im elementaren Unterricht hat man in den letzten Jahrzehnten den Funktionsbegriff eingeführt und mit vollem Recht. Man sagt dann dem Schüler, y ist eine Funktion von x, wenn nach einer *bestimmten Rechenvorschrift* jeder Zahl x eine bestimmte Zahl y zugeordnet ist. Wo ist nun die Rechenvorschrift für die Funktionen $y = x^{\frac{1}{5}}$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \log x$? Wird die Rechenvorschrift, wie es nach den obigen Ausführungen meist der Fall ist, nicht gegeben, so sind die Funktionen gar nicht definiert. Für den Schüler stehen Symbole da, mit denen er wirklich nichts anfangen kann. Er wird mit den zunächst formal definierten Funktionen nur dann konkrete Vorstellungen verbinden, wenn

ihm sofort auch gezeigt wird, wie die Funktionen berechnet werden können, wenn also die Rechenvorschrift gegeben wird. Dem Schüler fremdes Zahlenmaterial in die Hände drücken, bedeutet Stärkung des Autoritätsglaubens. Damit begibt man sich aber des großen erzieherischen Wertes, der der Mathematik zukommt. Nichts soll der Schüler für wahr halten, weil es diese oder jene Autorität so gemeint hat. Nur was vor dem eigenen Verstande gerechtfertigt ist, hat Geltung. In der Mathematik kann man dem Schüler am klarsten zeigen, daß das Cartesianische „dubito" die Quelle fortschreitender Erkenntnis ist. Gerade der unerschütterliche Glaube an die Wahrheit und Unvergänglichkeit aller mathematischen Ergebnisse ist der große Reiz, den die Mathematik von jeher auf alle wissensdurstigen Menschen ausgeübt hat. Auf Grund der gegebenen Ausführungen ist daher als *selbstverständliche Forderung für den mathematischen Unterricht unbedingt zu verlangen, daß bei allen neu eingeführten Funktionen* (Wurzeln, Logarithmen, trigonometrische Funktionen) *oder Zahlen* (π, e) *sofort Methoden angegeben werden, wie diese Funktionen oder Zahlen berechnet werden können.* Wie dies zu geschehen hat, wird sich weiterhin ergeben.

Die doppelte, wohl nicht mehr auszurottende Bezeichnung der Wurzelgrößen einmal durch Wurzelzeichen und dann in Form von Potenzen mit gebrochenen Exponenten, sehe ich als einen Übelstand an. Die zweite Bezeichnung ist die wichtigere; denn sie läßt das Wurzelziehen unmittelbar als die Umkehroperation des Potenzierens erkennen: Wenn man fragt, welche Zahl gibt mit n potenziert a^{mn}?, wo a, m, n positive und m, n überdies noch ganze Zahlen sind, so ergibt sich a^m oder $a^{\frac{mn}{n}}$; man hat also den Exponenten durch n zu dividieren. Der Fall ist einfach, wenn der Exponent durch n teilbar ist. Ist dies nicht der Fall, so erhält man zunächst rein symbolisch eine Potenz mit gebrochenem Exponenten. Wie nun die Umkehroperation der Multiplikation aus dem Bereich der ganzen Zahlen herausführt, so werden durch das Wurzelziehen neue (irrationale) Zahlen eingeführt. Ihre Existenz soll unten bewiesen werden. Da die Rechengesetze für die Bruchpotenzen genau dieselben sind wie für die Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, und in der Analysis z. B. bei

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{2}{3}}, \int x^{\frac{1}{2}} dx, \ (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} x + \dots$$

die Bezeichnung der Wurzelgrößen in Form von Bruchpotenzen die wichtigere ist, so wäre es sofort bei der Begründung der Wurzellehre angezeigt, immer Bruchpotenzen zu schreiben. Man würde den Schüler das Symbol $a^{\frac{b}{c}}$ stets lesen lassen: „c-te Wurzel aus a^b." Wenn man dann die andere leider nicht mehr fortzuschaffende Bezeichnung $\sqrt[c]{a^b}$ einführt, so versteht der Schüler sehr leicht, daß dies nur eine andere Bezeich-

nungsweise ist. Dadurch wird auch sehr viel an Zeit gewonnen. Die Lehrbücher machen es durchweg gerade umgekehrt, aber nicht zum Vorteil des Verständnisses. Sie behandeln meist die Wurzellehre zweimal, zuerst in der Bezeichnung $\sqrt[c]{a^b}$, dann in der anderen. Darum geht mein Vorschlag dahin, stets Bruchpotenzen zu schreiben und nur gelegentlich etwa bei den Quadratwurzeln das Wurzelzeichen zu verwenden.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wende ich mich nun zur Darstellung der Wurzellehre selbst. Beim Ausziehen der Quadratwurzel ist es gar nicht erforderlich, daß die Schüler eine besondere Gewandtheit erreichen. Man benutzt sehr bald ausschließlich die Quadratzahlentabelle, an der das Aufschlagen von Zahlenwerten gelernt werden soll. Hier zeigt man auch, daß jede solche Tabelle nicht bloß die Werte y der Funktion $f(x)$, sondern auch die Werte x der Umkehrfunktion $\varphi(y)$ liefert.

Das in den Lehrbüchern ausschließlich befolgte Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzeln kann durch ein viel elementareres und mindestens ebenso rasch zum Ziele führendes ersetzt werden[1]). Diese schon *Heron* von Alexandria bekannte Methode besitzt außerdem den großen Vorzug, daß der Schüler an der Hand des Verfahrens selbst einen klaren Einblick in das Wesen der Irrationalität der Quadratwurzel gewinnen kann. Zunächst ein Zahlenbeispiel. Es werde die Quadratwurzel aus 2 gesucht; 1 ist zu klein, 2 zu groß. Was liegt näher, als das arithmetische Mittel zu 1 und 2, also $\frac{3}{2}$ zu nehmen? Da das arithmetische Mittel $\frac{3}{2}$ größer ist als das geometrische Mittel $(1 \cdot 2)^{\frac{1}{2}}$ (vgl. den Schluß dieses Paragraphen), so ist $\frac{3}{2}$ zu groß und darum $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$ zu klein. Jetzt nehme man wieder zu $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$ das arithmetische Mittel, d. h. $\frac{17}{12}$, so hat man abermals einen zu großen Wert, und $2 : \frac{17}{12} = \frac{24}{17}$ ist zu klein. So fortschreitend gelangt man zu den folgenden Zahlenreihen

$$\begin{array}{l} 2;\ \frac{3}{2};\ \frac{17}{12};\ \frac{577}{408};\ \ldots \\ 1;\ \frac{4}{3};\ \frac{24}{17};\ \frac{816}{577};\ \ldots \end{array} \tag{1}$$

oder in Dezimalbrüchen geschrieben

$$\begin{array}{llll} 2{,}0; & 1{,}5; & 1{,}416; & 1{,}414215; \ldots \\ 1{,}0; & 1{,}3; & 1{,}411; & 1{,}414211; \ldots \end{array} \tag{2}$$

Die Zahlen in der ersten Zeile fallen, die in der zweiten steigen. Jede Zahl der ersten Reihe ist größer als irgendeine Zahl der zweiten Reihe.

[1]) Wegen der Geschichte des Verfahrens vgl. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 39, 1894 (histor.-liter. Abtlg.) S. 13—15 und ebd. 42, 1897 (histor.-liter. Abtlg.) S. 113f. Vgl. auch *K. Kommerell*, Ausziehen einer Quadratwurzel, Württ. Korrespondenzblatt 1898, S. 268f. und *A. Hurwitz*, Über die Einführung der elementaren transzendenten Funktionen in der algebraischen Analysis, Math. Annal. Bd. 70, 1911 S. 33f.

Beide Reihen scheinen demselben „Grenzwert" zuzustreben. Rechnet man einige derartige Beispiele in dem angegebenen Sinne durch, so erhält der Schüler schon ein Gefühl dafür, um was es sich handelt. Jetzt wird er auch leicht die folgende theoretische Darstellung verstehen.

Verlangt sei die Lösung der Gleichung

$$x^2 = c,$$

wo c eine positive ganze oder gebrochene Zahl ist. Es mögen a_1, b_1, zwei ebensolche Zahlen sein, deren Produkt gleich c ist, so daß also

$$b_1 = \frac{c}{a_1}$$

ist; außerdem sei $a_1 > b_1$.

Man bilde nun wie oben bei dem Zahlenbeispiel

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{c}{a_1}\right),\ b_2 = \frac{c}{a_2} = \frac{c}{\frac{a_1 + b_1}{2}}; \\ a_3 &= \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{c}{a_2}\right),\ b_3 = \frac{c}{a_3} = \frac{c}{\frac{a_2 + b_2}{2}}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right),\ b_{n+1} = \frac{c}{a_{n+1}} = \frac{c}{\frac{a_n + b_n}{2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß a_n und b_n mit wachsendem n demselben „Grenzwert", nämlich $c^{\frac{1}{2}}$ zustreben. Aus (3) folgt zunächst

$$\begin{aligned} a_2 - b_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{a_1 b_1}{\frac{a_1 + b_1}{2}} = \frac{a_1 - b_1}{2} \cdot \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} = \left(\frac{a_1 - b_1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a_2} \\ a_3 - b_3 &= \frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{a_2 b_2}{\frac{a_2 + b_2}{2}} = \frac{a_2 - b_2}{2} \cdot \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} = \left(\frac{a_2 - b_2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a_3}, \text{ usw.} \end{aligned} \tag{4}$$

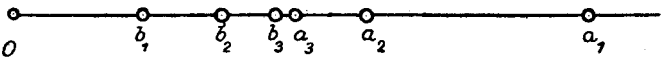

Fig. 1

Trägt man die Zahlen a_i, b_i auf einer Abszissenachse ab, deren positiver Sinn von links nach rechts geht, so folgt aus (4), daß, wie a_1 rechts von b_1, so auch a_2 rechts von b_2 usw. liegt; oder es ist

$$a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ a_4 > b_4 \ldots$$

Weiter ist nach (3)

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= a_1 - \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{a_1 - b_1}{2};\ a_2 - a_3 = \frac{a_2 - b_2}{2}; \ldots \\ b_2 - b_1 &= \frac{a_1 b_1}{\frac{a_1 + b_1}{2}} - b_1 = b_1 \cdot \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1};\ b_3 - b_2 = b_2 \cdot \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2}; \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

und daraus folgt, daß a_2 links von a_1 und b_2 rechts von b_1 usw. liegt. Man hat also

$$a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_n > b_n \ldots > b_3 > b_2 > b_1 . \qquad (6)$$

Die Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ bilden eine *monoton abnehmende Zahlenfolge*, die Zahlen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ dagegen *eine monoton zunehmende Folge*. Die Zahlenpaare (a_1, b_1), (a_2, b_2), $(a_3, b_3) \ldots$ begrenzen auf der Zahlengeraden der Fig. 1 Intervalle; jedes Intervall liegt innerhalb des vorhergehenden, *„die Intervalle sind ineinander geschachtelt"*. Nun zeigen wir noch, daß die Längen der Intervalle $a_n - b_n$ mit wachsendem n der Null zustreben. Aus (4) ergibt sich nämlich

$$a_2 - b_2 < \frac{a_1 - b_1}{2}; \quad a_3 - b_3 < \frac{a_2 - b_2}{2} < \frac{a_1 - b_1}{4}; \quad a_4 - b_4 < \frac{a_1 - b_1}{8}$$

usw., d. h. die Zahlen a_n und b_n kommen mit wachsendem n einander so nahe, als man will: sie streben einem gemeinsamen Grenzwert k zu. Es ist also

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = k.$$

Da nun nach (3) $a_n \cdot b_n = c$, so folgt durch Grenzübergang

$$k^2 = c, \; k = c^{\frac{1}{2}}.$$

Der Grenzwert k ist also die gesuchte Quadratwurzel aus c und zwar der positive Wert. Dem Grenzwert k entspricht auf der Zahlengeraden ein Punkt, der allen Intervallen (a_i, b_i) angehört.

Die „Konvergenz" nach dem Grenzwert erfolgt sehr rasch; denn, da $a_2 > k = c^{\frac{1}{2}}$ ist, so ergibt sich aus (4)

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}.$$

Das oben dargestellte Verfahren ist nichts anderes als die *Newtonsche Näherungsmethode*, angewendet auf die Gleichung

$$x^2 = c.$$

Denn ist a_1 ein Näherungswert, h die „Korrektur", so daß

$$a_2 = a_1 + h$$

der wahre Wert für x ist, so hat man $a_1^2 + 2\,a_1\,h + h^2 = c$ oder, wenn h^2 vernachlässigt wird, $a_1^2 + 2\,a_1\,h = c$, wo jetzt aber h nur ein Näherungswert für die Korrektur ist. Es ist nun

$$h = \frac{c - a_1^2}{2\,a_1} = \frac{c}{2\,a_1} - \frac{a_1}{2}$$

und eingesetzt in $a_2 = a_1 + h$, erhält man für a_2 den Näherungswert

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{c}{a_1}\right),$$

was mit (3) übereinstimmt.

An dem Beispiel kann man sehr schön den Begriff der *Intervallschachtelung* abstrahieren. Man wird sagen:

Definition. Hat man eine monoton fallende Folge von rationalen Zahlen (a_n), *für die also*

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \ldots \geqq a_n$$

gilt und eine monoton steigende Folge von rationalen Zahlen (b_n), *für die also*

$$b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \ldots \leqq b_n$$

gilt, und bilden die als nicht negativ vorausgesetzten Differenzen

$$d_n = a_n - b_n$$

eine Nullfolge, so daß also

$$\lim_{n \to \infty} d_n = \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$$

ist, so soll kurz gesagt werden, es sei dadurch eine Intervallschachtelung definiert[1].)

Durch eine solche Intervallschachtelung wird, wie in dem Beispiel, eine bestimmte Zahl oder auf der Zahlengeraden ein bestimmter Punkt[2]) definiert. Unter Hinweis auf das Beispiel wird man dem Schüler klarmachen, daß die *rationalen* Zahlen a_n oder b_n um so bessere Näherungswerte für die Zahl $(c^{\frac{1}{2}})$ sind, je größer n gewählt wird. Weiter wird man an dem Beispiel zeigen, daß, falls c nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist, $c^{\frac{1}{2}}$ nicht rational sein kann. Durch die Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen, die nicht Quadrate von anderen rationalen Zahlen sind (Irrationalzahlen), wird das Gebiet der rationalen Zahlen erweitert, wie früher das Gebiet der ganzen Zahlen durch Einführung der Brüche erweitert worden ist.

Die Zahlenreihen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sind *konvergente Zahlenfolgen — Cantorsche Fundamentalreihen.* Durch jede dieser Folgen ist die Zahl k selbst schon definiert, da ja

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = k$$

war. Es ist auch nützlich, das Kriterium für die Konvergenz monotoner Zahlenfolgen anzuführen, den

Monotoniesatz. Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist stets konvergent.

Der Beweis erfolgt in der bekannten Weise durch die Halbierungsmethode.

---

[1]) Dadurch, daß im Gegensatz zu (6) auch das Gleichheitszeichen zugelassen wurde, wird gestattet, daß die Intervalle in ihren Endpunkten teilweise zusammenstoßen dürfen.

[2]) Man beachte, daß hier eine axiomatische Forderung vorliegt. Vgl. § 17, S. 88.

Man kann nun das durch Ziehen von Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen geschaffene Gebiet erweitern, indem man aus den rationalen Zahlen zweimal, dreimal usw. die Quadratwurzel zieht. Dies geschieht im einzelnen so. Sind c und c' zwei positive rationale Zahlen, und ist $c > c'$, so ist auch

$$c^{\frac{1}{2}} > c'^{\frac{1}{2}};$$ denn aus $c : c' > 1$ folgt $c^{\frac{1}{2}} : c'^{\frac{1}{2}} > 1$, also $c^{\frac{1}{2}} > c'^{\frac{1}{2}}$.

Aus (6) folgt darum

$$a_1^{\frac{1}{2}} > a_2^{\frac{1}{2}} > \ldots > a_n^{\frac{1}{2}} > b_n^{\frac{1}{2}} > \ldots > b_2^{\frac{1}{2}} > b_1^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

oder, wenn

$$\alpha_i^2 = a_i,\ \beta_i^2 = b_i \tag{8}$$

gesetzt wird,

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \beta_n > \ldots > \beta_2 > \beta_1. \tag{9}$$

Da nun

$$a_n - b_n = \alpha_n^2 - \beta_n^2$$

ist, so ergibt sich aus

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0,\ \lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0,$$

und jetzt folgt mit (9), daß die (α_i, β_i) eine Intervallschachtelung definieren. Es ist also

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = k',$$

wo k' der gemeinsame Grenzwert der konvergenten Zahlenfolgen α_i und β_i ist. Aus $a_n = \alpha_n^2$ folgt aber durch Grenzübergang

$$k = c^{\frac{1}{2}} = k'^2 \text{ oder } k' = c^{\frac{1}{4}}.$$

Die Zahlen in (9) sind zum Unterschied von (6) irrationale. Da aber jedes einzelne α_n bzw. β_n beliebig genau durch eine rationale Zahl angenähert werden kann, so ist es leicht, konvergente Folgen von *rationalen* Zahlen anzugeben, die die Zahl $c^{\frac{1}{4}}$ definieren, man braucht ja nur aus jedem Intervall (α_n, β_n) eine rationale Zahl herauszugreifen. Indessen wird man dies besser unterlassen. Das Ziel des *elementaren* Unterrichts kann nicht sein, bis zur letzten erreichbaren Schärfe der Beweise, vielleicht auf Kosten des Verständnisses, vorzudringen, sondern den Lernenden in die wesentlichen Teile einzuführen. Von $c^{\frac{1}{4}}$ schreitet man zu $c^{\frac{1}{8}}$ usw. fort.

Was geschieht nun, wenn aus einer positiven Zahl $c > 1$ fortgesetzt die Quadratwurzel gezogen wird? Nimmt man an, daß $c > 4$; dann ist wegen

$$c(c-4) > 0,\ c^2 > 4c,\ c < \frac{c^2}{4},\ c^{\frac{1}{2}} < \frac{c}{2}.$$

Ist auch noch $c^{\frac{1}{2}} > 4$, so folgt ebenso

$$c^{\frac{1}{4}} < \frac{1}{2} c^{\frac{1}{2}} < \frac{c}{4}.$$

Durch fortgesetztes Quadratwurzelziehen gelangt man also sicher einmal zu einer Zahl, die kleiner als 8 ist. Zieht man jetzt noch zweimal die Quadratwurzel, so erhält man eine Zahl c', die zwischen 1 und 2 liegt, also von der Form

$$c' = 1 + \varepsilon,$$

wo die positive Zahl $\varepsilon < 1$ ist. Durch die beiden letzten Operationen wäre man auch zu einer solchen Zahl c' gelangt, wenn $c \leqq 4$ wäre. Zieht man aus dieser Zahl c' wieder die Quadratwurzel, so setze man zur Ausführung der Rechnung in dem Heronischen Verfahren

$$a_1 = 1 + \varepsilon;\ b_1 = 1;\ \text{also}\ a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da nun $c'^{\frac{1}{2}} < a_2$ ist, so folgt

$$c'^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2};$$

andererseits ist $c'^{\frac{1}{2}} > b_1 = 1$. Die Zahl $c'^{\frac{1}{2}}$ liegt also zwischen 1 und $1 + \frac{\varepsilon}{2}$, darum $c'^{\frac{1}{4}}$ zwischen 1 und $1 + \frac{\varepsilon}{4}$, $c'^{\frac{1}{8}}$ zwischen 1 und $1 + \frac{\varepsilon}{8}$ usw. Zieht man also aus einer Zahl, die größer als 1 ist, fortgesetzt die Quadratwurzel, so kommt man der Zahl 1 so nahe, als man will. Es ist also

$$\lim_{n \to \infty} c^{\frac{1}{2^n}} = 1. \tag{10}$$

Daß dies auch der Fall ist, wenn die positive Zahl $c < 1$ ist, zeigt man durch Betrachtung des reziproken Wertes der Zahl. Die Gleichung (10) gilt daher für jede positive Zahl c. Damit erscheint dem Schüler die früher auf Grund der Permanenz der Rechengesetze eingeführte Zahl $c^0 = 1$ in neuem Lichte.

Im Lehrgange würde jetzt gezeigt werden, daß für die Wurzelgrößen wie $c^{\frac{1}{2}}$, $d^{\frac{1}{4}}$ usw. dieselben Rechengesetze gelten, wie für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Die allgemeine Wurzellehre wäre erst später zu behandeln.

Historische Bemerkung. Archimedes (287—212 v. Chr.) gibt in seiner berühmten *„Kreismessung"*

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3}.$$

Ich will mit einer an Gewißheit grenzenden Wahrscheinlichkeit zeigen, daß ***Archimedes diesen Näherungswert nach keinem anderen als dem Verfahren von Heron gefunden hat.***

Aus (3) folgt nämlich

$$a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + c = 0, \quad a_n = a_{n+1} + (a_{n+1}^2 - c)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

wo die Wurzel wegen $a_n > a_{n+1}$ positiv auszuziehen ist. Setzt man hier

$$a_{n+1} = \frac{1351}{780}, \quad c = 3,$$

so findet man nach (11)

$$a_n = \frac{1351}{780} + \left\{\left(\frac{1351}{780}\right)^2 - 3\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1351+1}{780} = \frac{26}{15}.$$

Es kann doch gewiß kein Zufall sein, daß a_n *rational* ist. Aber noch mehr zur Stütze unserer Hypothese! Setzt man jetzt in (11)

$$a_{n+1} = \frac{26}{15}, \quad c = 3,$$

so ergibt sich für a_n wieder ein *rationaler* Wert, nämlich $a_n = 9:5$. Hieraus folgt: $b_n = c : a_n = 3 : a_n = 5:3$. *Archimedes* ist also höchstwahrscheinlich von dem durch Schätzen gefundenen Wert $b_1 = 5:3$ ausgegangen und hat dann nach dem Heronischen Verfahren, das wir oben dargestellt haben, seinen Näherungswert gefunden. Damit werden alle die komplizierten, dem Geiste der griechischen Mathematiker fremden Theorien[1]), die man zur Erklärung der Archimedischen Wurzelwerte ersonnen hat, hinfällig.

Es möge noch bemerkt werden, daß bei den anderen bei *Archimedes* vorkommenden Quadratwurzeln das Verfahren dadurch verdeckt wird, daß er die Näherungswerte nachträglich so abändert, daß sich kleinere Zahlen ergeben. Ohne mich hier näher darüber zu verbreiten, will ich an einem Beispiel zeigen, wie dies *Archimedes* wohl gemacht hat.

Es findet sich in der Kreismessung

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3}.$$

Berechnet man aus

$$b_{n+1} = \frac{265}{153} \text{ den Wert } a_{n+1} = \frac{3.153}{265} = \frac{459}{265}$$

und wendet die Formel (11) an, so findet man für a_n einen *irrationalen* Wert. Wie ist also *Archimedes* zu dem Wert b_{n+1} gekommen? Wenn *Archimedes* wirklich die Heronische Methode, wie oben gezeigt, angewendet hat, so ist klar, daß er aus dem oben angegebenen Wert

$$a_{n+1} = \frac{1351}{780} > \sqrt{3}$$

durch Berechnung des zugehörigen b_{n+1}

$$b_{n+1} = 3 : \frac{1351}{780}$$

[1]) Wegen dieser Theorien vgl. *Cantor*, „Vorlesgn. üb. Gesch. d. Math." 3. Aufl. 1907, Bd. I. S. 317. *Heilermann*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 26, 1881 (histor.-liter. Abtlg.) S. 121 f. *Weißenborn* ebendort 28, 1883 S. 81 f. *Schönborn*, ebendort 28, 1883 S. 169 f.

in den Besitz eines Wertes (eben b_{n+1}) kommen konnte, der $< \sqrt{3}$ ist, wie es seiner Absicht entsprach. Man erhält so

$$b_{n+1} = \frac{2340}{1351} = 1\frac{989}{1351} < \sqrt{3}. \tag{12}$$

Die Zahlen sind *Archimedes* zu groß, weshalb er daraus einen Näherungswert mit kleineren Zahlen ableitet, der weniger genau ist, aber dennoch für seine Aufgabe genügt. Zu diesem Zwecke hat er wohl in dem Bruch 989 : 1351 oben und unten mit 9 gehoben, was sehr nahe lag, da 1350 $= 9 \cdot 150$ ist. So kommt statt des Bruches 989 : 1351 der Bruch 109 : 150 zustande, und es ist

$$\frac{109}{150} < \frac{989}{1351}.$$

Der Bruch 109 : 150 ist aber natürlich ziemlich unscharf, obgleich 110 : 150 schon größer als 989 : 1351 ist. Nun wird aber ein positiver echter Bruch $p : q$ vergrößert, wenn der Zähler und Nenner um die Einheit vermehrt wird; denn es ist

$$\frac{p+1}{q+1} - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q(q+1)} > 0.$$

Man kommt so von 109 : 150 ausgehend auf die Brüche

$$\frac{110}{151}, \frac{111}{152}, \frac{112}{153}, \frac{113}{154}.$$

Die drei ersten sind immer noch kleiner als 989 : 1351 in (12), während der letzte Bruch größer ist. Von den drei ersten Brüchen approximiert daher der dritte den Bruch 989 : 1351 am besten und ist kleiner als dieser. So hat man nach (12)

$$1\frac{112}{153} = \frac{265}{153} < \sqrt{3},$$

womit der Archimedische Wert erklärt ist. Die Erklärung fordert ganz einfache Umformungen, die ein so gewandter Rechner wie *Archimedes* sicher gekannt hat. Merkwürdigerweise ist 112 : 153 gerade ein Näherungswert des Kettenbruchs, den man für 989 : 1351 erhält. Das zeigt, wie scharf *Archimedes* abgeschätzt hat. Ihm aber die Kenntnis der Kettenbrüche zuzuschreiben, wie es manche Forscher wollen, scheint mir sehr gewagt zu sein; denn wäre den Alten bekannt gewesen, wie leicht man durch die Näherungswerte von Kettenbrüchen Zahlen approximieren kann, so hätten sie uns gewiß auch von dieser wichtigen Tatsache berichtet. Dies ist aber nicht der Fall.

Zahlentheoretische Bemerkung

Aus der Formel (11) ist zu schließen, daß

$$(a_{n+1}^2 - c)^{\frac{1}{2}}$$

eine ***rationale*** Zahl sein muß, wenn a_{n+1} ein durch das Heronische Verfahren gefundener Näherungswert für $c^{\frac{1}{2}}$ ist. Es sei nun

$$a_n = \frac{p}{q}$$

gesetzt, wo p und q zwei beliebige teilerfremde positive Zahlen seien, dann folgt aus (3)

$$b_n = \frac{cq}{p},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ a_{n+1} = \frac{p^2 + cq^2}{2pq}$$

und jetzt, daß

$$\left\{\left(\frac{p^2 + cq^2}{2pq}\right)^2 - c\right\}^{\frac{1}{2}}$$

eine *rationale* Zahl sein muß. Ist von nun an c eine *ganze* positive Zahl, so folgt, daß

$$[(p^2 + cq^2)^2 - 4cp^2q^2]^{\frac{1}{2}}$$

eine ganze Zahl ist. In der Tat hat man die Identität

$$(p^2 + cq^2)^2 - c\,(2pq)^2 = (p^2 - cq^2)^2. \tag{13}$$

Setzt man nun

$$z = p^2 + cq^2,\ x = 2pq,\ y = p^2 - cq^2, \tag{14}$$

so hat man eine *ganzzahlige Lösung x, y, z der Diophantischen*[1]) *Gleichung*

$$z^2 - cx^2 = y^2. \tag{15}$$

Dabei sind p und q willkürliche (teilerfremde) positive ganze Zahlen, von denen nur noch vorauszusetzen ist, daß $a_n^2 = \frac{p^2}{q^2} > c$ ist, damit y in (14), wie es x und z sind, positiv wird; die a_k in (3) mußten ja auch $> c^{\frac{1}{2}}$ sein.

Pythagoreische Dreiecke

Setzt man oben $c = 1$, so sind

$$x = 2pq,\ y = p^2 - q^2,\ z = p^2 + q^2, \tag{16}$$

mit $p > q$ ganzzahlige positive Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2, \tag{17}$$

oder, x und y sind die Katheten und z ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks; ein solches rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten durch ganzzahlige Maßzahlen gemessen werden, heißt ein *Pythagoreisches Dreieck*.

Mit $p = 2$, $q = 1$ folgt: $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$,

Mit $p = 3$, $q = 2$ folgt: $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$, usw.

Das erste Dreieck war den Ägyptern, das zweite den Indern bekannt. Wahrscheinlich bediente man sich ihrer schon damals, um rechte Winkel im Felde mit Hilfe von Schnüren abzustecken.

Die Identität (13) lautet für $c = 1$

$$p^2q^2 = \left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2 - q^2}{2}\right)^2, \tag{18}$$

[1]) Wegen dieser Benennung vgl. § 12.

oder in anderer Bezeichnung

$$p\,q = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2, \tag{19}$$

oder

$$\sqrt{p\,q} = \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2}. \tag{20}$$

Hieraus folgt der oben schon benutzte

Satz. Das geometrische Mittel $\sqrt{p\,q}$ zwischen zwei voneinander verschiedenen positiven Zahlen p und q ist stets kleiner als das arithmetische Mittel $\frac{p+q}{2}$.

Die algebraische Identität (19) erhält man sehr anschaulich (Fig. 2) aus einem rechtwinkligen Dreieck $A\,B\,C$ mit den vom Höhenfußpunkt D begrenzten Hypotenusenabschnitten

$$CD = p \quad \text{und} \quad BD = q.$$

Ist E die Mitte von BC, so ist

$$AE = \frac{p+q}{2},$$

$$DE = \frac{p-q}{2}, \quad AD = \sqrt{pq}$$

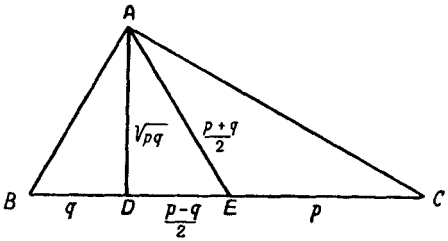

Fig. 2

Die Identität (19) erhält man jetzt durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf das Dreieck $A\,D\,E$. Auch der oben erwähnte Satz ist jetzt anschaulich klar.

Das Dreieck $A\,D\,E$ ist nun ein pythagoreisches, wenn p und q *beide gerade* oder *beide ungerade* ganze Zahlen sind, und wenn $\sqrt{p\,q}$ rational ist.

Sollten die von Pythagoras, Platon und *Euklid gegebenen Lösungen nicht so ihre einfachste Erklärung finden*? In der Tat, setzt man

$$p = (2\,\alpha + 1)^2, \; q = 1,$$

so wird

$$AD = 2\,\alpha + 1, \; DE = 2\,\alpha^2 + 2\,\alpha, \; AE = 2\,\alpha^2 + 2\,\alpha + 1,$$

womit man die von *Proklus* dem *Pythagoras* zugeschriebene Lösung hat; vgl. *M. Cantor*, „Vorlesgn. üb. Gesch. d. Math." 3. Aufl. 1907, Bd. I., S. 185.

Setzt man andererseits

$$p = 2\,\alpha^2, \; q = 2,$$

so wird

$$AD = 2\,\alpha, \; DE = \alpha^2 - 1, \; AE = \alpha^2 + 1,$$

eine Auflösung der Aufgabe, die nach *Heron* und *Proklus* von *Platon* herrühren soll (*M. Cantor*, ebendort S. 224).

Und wenn man endlich

$$p = \alpha\beta^2,\ q = \alpha\gamma^2$$

setzt, so hat man

$$AD = \alpha\beta\gamma,\ DE = \frac{\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2}{2},\ AE = \frac{\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2}{2},$$

und damit die von *Euklid* gegebene Lösung (*M. Cantor, ebendort* S. 270).

Die pythagoreischen Dreiecke erhält man übrigens auch durch zahlentheoretische Schlüsse der einfachsten Art. Es soll also die Gleichung (17) in ganzen Zahlen gelöst werden, wobei wir voraussetzen können, daß x, y, z keinen Faktor gemein haben. Zuerst machen wir uns klar, daß in

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{21}$$

x und y nicht beide gerade sein können; denn sonst wäre auch z gerade gegen die Voraussetzung; x und y können aber auch nicht beide ungerade sein; denn wäre

$$x = 2\alpha + 1,\ y = 2\beta + 1,$$

so wäre

$$z^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\alpha + 4\beta + 2,$$

und z^2 wäre nicht durch 4 teilbar, was doch sein muß, da z eine gerade Zahl wäre. Man kann also annehmen, daß x gerade, y ungerade und darum auch z ungerade ist. Also ist $z + y$ und $z - y$ gerade. Man kann also setzen

$$z + y = 2\gamma,\ z - y = 2\delta \tag{22}$$

oder

$$z = \gamma + \delta,\ y = \gamma - \delta. \tag{23}$$

Hier müssen γ und δ relativ prim und eine der Zahlen gerade, die andere ungerade sein, sonst hätten y und z einen Faktor gemein; überdies muß $\gamma > \delta$ sein.

Jetzt ist, da nach (21) $x^2 = (z + y)(z - y)$ ist,

$$x^2 = 4\gamma\delta. \tag{24}$$

Da γ und δ relativ prim sind, und rechts ein Quadrat stehen muß, so folgt

$$\gamma = p^2,\ \delta = q^2,$$

und jetzt aus (23) und (24)

$$x = 2pq,\ y = p^2 - q^2,\ z = p^2 + q^2, \tag{25}$$

also dieselbe Lösung wie in (16). Damit x, y, z relativ prim werden, ist erforderlich, daß p und q relativ prim sind und die eine Zahl gerade, die andere ungerade ist; außerdem muß $p > q$ sein. Man sieht auch ein, daß damit alle Lösungen für x, y, z erhalten werden, wenn diese relativ prim sind.

Sehr hübsch behandelt *F. Klein* das Problem. Es seien von dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ die Punkte mit rationalen Koordinaten gesucht. Zieht man durch den „rationalen" Punkt (1,0) des Kreises eine Gerade

$$y = \frac{p}{q}(1 - x)$$

mit rationalem Richtungsfaktor $\frac{p}{q}$, so müssen sich die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes wegen der Eindeutigkeit rational durch p und q ausdrücken. In der Tat findet man leicht

$$x = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \quad y = \frac{2pq}{p^2 + q^2} \tag{26}$$

und gelangt dann wieder zu (16). Diese Methode ist auch für andere Fälle geeignet.

§ 2. Berechnung beliebiger Wurzelgrößen

Da im folgenden die Zweierbrüche (dyadischen Brüche) eine Rolle spielen, so ist es gut, sich klar zu machen, daß ein echter positiver Bruch ebensogut nach Potenzen von $\frac{1}{2}$ (dyadischer Bruch) wie nach Potenzen von $\frac{1}{10}$ (Dezimalbruch) entwickelt werden kann. Die Verwandlung eines echten Bruches in einen Zweierbruch erfolgt ganz wie bei der Verwandlung in einen Dezimalbruch, nur hat man jeweils statt mit 10 mit 2 zu multiplizieren. So ist z. B.

$$\frac{1}{5} = 0{,}0011\,0011\,0011\ldots = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots,$$

wo das umgekehrte Komma (,) den Zweierbruch andeuten soll. Der Bruch ist periodisch; durch Summierung der geometrischen Reihe ergibt sich wieder $\frac{1}{5}$. Für das Folgende schreiben wir den Zweierbruch noch in der Form

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3 \cdot 2^1} + \frac{1}{2^3 \cdot 2^1 \cdot 2^3} + \frac{1}{2^3 \cdot 2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^1} + \ldots, \tag{1}$$

und nun möge sofort an einem Beispiele gezeigt werden, auf welchem Gedanken die Berechnung einer beliebigen Wurzelgröße beruht. Es sei $8^{\frac{1}{5}}$ zu berechnen. Man setze also

$$8^{\frac{1}{5}} = 8^{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3 \cdot 2^1} + \frac{1}{2^3 \cdot 2^1 \cdot 2^3} + \ldots} \tag{2}$$

Es liegt die Vermutung auch für den Schüler sehr nahe, daß man den Wert von $8^{\frac{1}{5}}$ um so genauer erhalten wird, je mehr Glieder in der Reihe, welche den Exponenten darstellt, berücksichtigt werden. Es handelt sich jetzt darum, zu zeigen, wie man eine Größe von der Form

$$y_1 = a^{\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1} 2^{a_2}} + \frac{1}{2^{a_1} 2^{a_2} 2^{a_3}} + \frac{1}{2^{a_1} 2^{a_2} 2^{a_3} 2^{a_4}} + \ldots} \tag{3}$$

berechnet, wo a und α_i positive und α_i überdies ganze Zahlen bedeuten. Der Exponent möge lediglich aus den angeschriebenen Gliedern bestehen. Man berechne nun der Reihe nach

$$y_4 = a \cdot a^{\frac{1}{2^{\alpha_4}}},\quad y_3 = a\, y_4^{\frac{1}{2^{\alpha_3}}},\quad y_2 = a\, y_3^{\frac{1}{2^{\alpha_2}}},\quad y_1 = y_2^{\frac{1}{2^{\alpha_1}}}. \tag{4}$$

In der Tat ergibt sich von vorne beginnend

$$y_4 = a^{1+\frac{1}{2^{\alpha_4}}},\quad y_3 = a^{1+\frac{1}{2^{\alpha_3}}+\frac{1}{2^{\alpha_3}2^{\alpha_4}}},\quad y_2 = a^{1+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}2^{\alpha_3}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}2^{\alpha_3}2^{\alpha_4}}},$$

und für y_1 erhält man den in (3) angegebenen Wert. Nach (4) findet man aber y_4, wenn aus a $\alpha_4$mal die Quadratwurzel gezogen und dann mit a multipliziert wird, entsprechend y_3, y_2 und y_1. Die Rechnung gestaltet sich, wenn a eine kleine ganze Zahl ist, mit Hilfe der Quadratzahlentabelle sehr einfach. In der Folge kommt übrigens für a hauptsächlich der Wert 10 in Betracht.

Berechnung von $y_1 = 8^{\frac{1}{5}}$.

Es ist nach (2)

$\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = 3,\ \alpha_6 = 1,\ \alpha_7 = 3,\ \alpha_8 = 1,\ \alpha_9 = 3.$

Man hat also als letztes Glied im Exponenten von (2) das Glied $1 : 2^{19}$ berücksichtigt. In dem folgenden Schema ist die ganze Rechnung enthalten, ohne daß irgendeine Nebenrechnung unterdrückt wäre.

	1	2	3	
$a = 8$	2,8284	1,6818	1,2968	$\alpha_9 = 3$
$y_9 = 10{,}3744$	3,2209			$\alpha_8 = 1$
$y_8 = 25{,}7672$	5,0761	2,2530	1,5010	$\alpha_7 = 3$
$y_7 = 12{,}0080$	3,4653			$\alpha_6 = 1$
$y_6 = 27{,}7224$	5,2652	2,2946	1,5148	$\alpha_5 = 3$
$y_5 = 12{,}1184$	3,4811			$\alpha_4 = 1$
$y_4 = 27{,}8488$	5,2772	2,2972	1,5156	$\alpha_3 = 3$
$y_3 = 12{,}1248$	3,4821			$\alpha_2 = 1$
$y_2 = 27{,}8568$	5,2780	2,2974	1,5157	$\alpha_1 = 3$
$y_1 = 1{,}5157$				

Den Wert $8^{\frac{1}{5}} = 1{,}5157$ gibt auch die 5-stellige Logarithmentafel. Übrigens folgt auch aus der vorletzten Zeile des Schemas

$$1{,}5157^4 = 5{,}2780 \text{ und dann } 1{,}5157^5 = 7{,}99986 \sim 8.$$

Die erste Zeile des Schemas hat sich dadurch ergeben, daß man aus $a = 8$ $\alpha_9 = 3$mal die Quadratwurzel gezogen hat; jetzt wird die Zahl 1,2968

mit 8 multipliziert, und man erhält so y_9. Aus y_9 wird $a_8 = 1$mal die Wurzel gezogen und dann mit 8 multipliziert, worauf sich y_8 ergibt usw. Die mit 3 überschriebene Spalte läßt die „Konvergenz" nach dem Näherungswert $y_1 = 1{,}5157$ erkennen. Würde man mit y_1 das Verfahren (der Exponent in (2) ist periodisch!) noch einmal wiederholen, so würde man bis auf 4 Dezimalstellen genau wieder auf y_1 geführt. Es ist also sehr nahe

$$\left\{(8y_1)^{\frac{1}{2}} \cdot 8\right\}^{\frac{1}{8}} = y_1,$$

woraus $y_1^{15} = 2^9$ oder $y_1 = 8^{\frac{1}{5}}$ folgt, womit sich eine neue Bestätigung für die angenäherte Richtigkeit des Wertes für y_1 einstellt. Derartige Rechnungen sind nebenbei bemerkt auch vortrefflich geeignet, den Schüler in den Gebrauch der Quadratzahlentafel einzuführen und haben mehr Sinn als willkürlich gewählte Beispiele.

Es ist nun auch nicht schwer, die Konvergenz des an Beispielen gezeigten Verfahrens theoretisch einzusehen. Zunächst sei daran erinnert, daß, wenn man für einen *unendlichen* Dezimalbruch wie

$$0{,}50609945\ldots$$

die Zahlenreihen

$$0{,}5;\ 0{,}50;\ 0{,}506;\ 0{,}5060;\ 0{,}50609;\ 0{,}506099;\ldots \qquad (5)$$

$$0{,}6;\ 0{,}51;\ 0{,}507;\ 0{,}5061;\ 0{,}50610;\ :{,}506100;\ldots \qquad (6)$$

in leicht ersichtlicher Gesetzmäßigkeit bildet, die Folge (5) wachsende bzw. nicht abnehmende, die Folge (8) abnehmende bzw. nicht zunehmende Zahlen enthält, daß außerdem jede Zahl aus (5) kleiner ist als jede Zahl aus (6), und daß endlich der Unterschied untereinander stehender Zahlen kleiner wird als jede noch so kleine positive Zahl, wenn man nur genügend weit in den Folgen fortschreitet. Nach Seite 6 liegt also eine Intervallschachtelung vor, durch die eine bestimmte Zahl definiert wird. Man kann auch sagen, die Folgen (5) und (6) sind konvergent und streben gegen denselben Grenzwert.

Entsprechendes gilt für einen Zweierbruch

$$\frac{1}{p} = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2^2} + \frac{\beta_3}{2^3} + \frac{\beta_4}{2^4} + \ldots, \qquad (7)$$

wo die β_i entweder 1 oder 0 sind. Wir setzen für das Folgende voraus, daß p in (7) positiv und ganz sei, und daß der Zweierbruch in (7) nicht abbricht; würde also (7) mit dem Glied $\frac{1}{2^n}$ abbrechen, so ersetze man $\frac{1}{2^n}$ durch

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \ldots,$$

eine geometrische Reihe, die als Summe den Wert $\frac{1}{2^n}$ hat. Dies ist hier also entsprechend wie bei der Dezimalbruchrechnung, wo man z. B. statt

1,23 auch 1,229999 ... schreiben kann. Bildet man nun entsprechend zu den Folgen (5) und (6) die Folgen

$$\frac{\beta_1}{2},\ \frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2},\ldots,\ \frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k}{2^k},\ldots \tag{8}$$

$$\frac{\beta_1+1}{2},\ \frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2+1}{2^2},\ldots,\ \frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k+1}{2^k},\ldots \tag{9}$$

so sieht man ein, daß jede der nicht abnehmenden Zahlen (8) $< 1:p$ und jede der nicht zunehmenden Zahlen (9) $\geqq 1:p$ ist. Die Differenz der untereinander stehenden Zahlen sinkt beim Fortschreiten in den Reihen unter jeden noch so kleinen Betrag herunter. Man hat wieder eine Intervallschachtelung für die Zahl $1:p$ oder zwei konvergente Zahlenfolgen mit dem gemeinsamen Grenzwert $1:p$. Darum konvergieren die beiden Folgen

$$p\cdot\frac{\beta_1}{2},\ p\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}\right),\ldots,\ p\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k}{2^k}\right),\ldots \tag{10}$$

$$p\left(\frac{\beta_1+1}{2}\right),\ p\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2+1}{2^2}\right),\ldots,\ p\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k+1}{2^k}\right),\ldots \tag{11}$$

gegen den Grenzwert 1.

Um nun für die positive Zahl a den Wert von $a^{\frac{1}{p}}$ zu berechnen, bilde man die beiden Zahlenfolgen

$$g_1=a^{\frac{\beta_1}{2}},\quad g_2=a^{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}},\ldots,\quad g_k=a^{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k}{2^k}},\ldots \tag{12}$$

$$G_1=a^{\frac{\beta_1+1}{2}},\ G_2=a^{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2+1}{2^2}},\ldots,\ G_k=a^{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k+1}{2^k}},\ldots \tag{13}$$

Ist $a>1$, so bilden die Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_k \ldots$ eine nicht abnehmende, die Zahlen $G_1, G_2, \ldots G_k, \ldots$ eine nicht zunehmende Folge; der Fall $a<1$ erledigt sich ebenso, nur sind dann fürs Folgende die Rollen der Zahlen g_k und G_k zu vertauschen. Da nun

$$\frac{G_k}{g_k}=a^{\frac{1}{2^k}} \tag{14}$$

ist und $a>1$ vorausgesetzt ist, so folgt aus (14)

$$G_k>g_k,$$

und weiter folgt aus (14), daß mit wachsendem k die Zahlen g_k und G_k [vgl. § 1, (10)] immer näher zusammenrücken: man hat wieder eine Intervallschachtelung oder zwei Folgen mit demselben Grenzwert. Daß dieser Grenzwert $a^{\frac{1}{p}}$ ist, zeigt man dadurch, daß man von den Zahlen (12) und (13) die p-ten Potenzen bildet, also

$$g_k^p=a^{p\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k}{2^k}\right)}, \tag{15}$$

$$\{k=1,\ 2,\ 3\ldots\}$$

$$G_k^p=a^{p\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\frac{\beta_3}{2^3}+\ldots+\frac{\beta_k+1}{2^k}\right)}. \tag{16}$$

Gerade so wie vorher ergibt sich, daß auch die beiden Folgen (15) und (16) denselben Grenzwert definieren. Nun ist es aber vollends sehr leicht, zu zeigen, daß dieser gemeinsame Grenzwert gleich a ist. Der Exponent in (15) rechts ist die letzte in (10) angeschriebene Zahl und < 1, da die Zahlen (10) nicht abnehmend dem Grenzwert 1 zustreben. Bringt man diesen Exponenten auf die Form $\frac{r}{2^k}$, wo r eine ganze positive Zahl ist, so ist also

$$r < 2^k . \tag{17}$$

Die Zahl g_k^p ist eine wohldefinierte Zahl b; denn es ist nach (15)

$$g_k^p = \overline{a^{2^k}}^r = b, \text{ also } a^r = b^{2^k} . \tag{18}$$

Wegen (17) folgt $b < a$, und man hat, da nach (18) $g_k^p = b$ ist,

$$g_k^p < a.$$

Ebenso zeigt man, daß

$$G_k^p \geqq a$$

ist. Da nun die Zahlen g_k^p und G_k^p gegen denselben Gegenwert konvergieren, so kann dieser nur gleich a sein. Die Zahlen g_k und G_k sind also solche Zahlen, daß ihre $p$ten Potenzen dem Wert a zustreben, d. h. es ist

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} G_k = \overline{a^p}^1 ,$$

womit der Beweis erbracht ist. Ganz ähnlich erfolgt der Beweis, wenn p keine ganze, sondern nur eine rationale Zahl ist, wobei $1 : p < 1$ ist. Nachdem so die Existenz der Wurzelgrößen gezeigt und *zugleich ein bequemer Weg zu ihrer Berechnung gewiesen ist,* wären im Lehrgange die Rechengesetze der Wurzeln in der Bezeichnung von Bruchpotenzen zu entwickeln.

§ 3. Berechnung von Numerus und Logarithmus mit Hilfe der Quadratzahlentabelle

Nachdem in § 2 gezeigt worden ist, wie jede beliebige Wurzelgröße leicht und rasch berechnet werden kann, ist der Übergang zu den Logarithmen sehr einfach und natürlich. Man stelle z. B. die

Aufgabe. Es soll $10^{0{,}30103}$ *berechnet werden* (vgl. die Forderung auf S. 2).

Man verwandelt 0,30103 in einen Zweierbruch und findet

$$0{,}30103 = 0{,}010011010001000001 \ldots$$

oder

$$0{,}30103 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2 2^3} + \frac{1}{2^2 2^3 2^1} + \frac{1}{2^2 2^3 2^1 2^3} + \cdots$$

Für das Schema auf S. 15 ist also

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 4,\ a_6 = 6,$$

und man hat daher folgende Berechnung:

	1	2	3	4	5	6	
$a = 10$	3,16	1,78	1,33	1,15	1,07	1,034	$a_6 = 6$
$y_6 = 10{,}34$	3,216	1,793	1,339	1,157			$a_5 = 4$
$y_5 = 11{,}57$	3,4015	1,8443					$a_4 = 2$
$y_4 = 18{,}443$	4,2945						$a_3 = 1$
$y_3 = 42{,}945$	6,5532	2,5599	1,59997				$a_2 = 3$
$y_2 = 15{,}9997$	3,99996	1,99999					$a_1 = 2$
$y_1 = 1{,}99999$							

Die ersten 5 Quadratwurzeln wurden nur auf 2, die nächsten 5 bis auf 3 Dezimalstellen usw. berechnet; dies genügt, wie ich hier nicht ausführen will[1]), um y_1 bis auf 5 Dezimalstellen genau zu erhalten. Es ist also

$$10^{0{,}30103} = 1{,}99999.$$

Läßt man ebenso $10^{0{,}47712}$ berechnen, so erhält man sehr scharf die Zahl 3. Der Schüler fragt sich dann wohl selbst, wie die Zahlen 0,30103 und 0,47712 gerade so gewählt worden sind, daß bezüglich 2 oder 3 herauskommt; könnte man so nicht jede beliebige Zahl hervorzaubern? Man wird so auf die Frage geführt: In der Gleichung

$$10^x = b, \tag{1}$$

wo b eine gegebene positive Zahl ist, soll die Zahl x bestimmt werden. Es genügt $b < 10$ und $b > 1$ anzunehmen. Die folgende Methode zur Bestimmung von x bildet gerade die Umkehrung der in § 2 gegebenen zur Berechnung der Wurzeln. Es sind in

$$x = \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_1}2^{\alpha_2}} + \frac{1}{2^{\alpha_1}2^{\alpha_2}2^{\alpha_3}} + \dots \tag{2}$$

oder in

$$10^{\frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_1}2^{\alpha_2}} + \frac{1}{2^{\alpha_1}2^{\alpha_2}2^{\alpha_3}} + \dots} = b \tag{3}$$

die ganzen positiven Zahlen α_i gesucht. Potenziert man in (3) rechts und links mit 2^{α_1}, d. h. quadriert man α_1 mal, so folgt

$$10^{1 + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}2^{\alpha_3}} + \dots} = b^{2^{\alpha_1}} \tag{4}$$

und hieraus, daß α_1 die Zahl angibt, wie oft b ins Quadrat zu erheben ist, damit eine Zahl ($b^{2^{\alpha_1}}$) zwischen 10 und 100 herauskommt, oder daß die Zahl 10 eben überschritten wird. Dividiert man in (4) links und rechts mit 10, so folgt

$$10^{\frac{1}{2^{\alpha_2}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}2^{\alpha_3}} + \dots} = b^{2^{\alpha_1}} : 10, \tag{5}$$

[1]) Vgl. *K. Kommerell*, *„Die Berechnung der Logarithmen durch wiederholtes Quadrieren"*. Arch. f. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 28, 1920, S. 137 f.

wo nun rechts wieder eine Zahl zwischen 1 und 10 steht. Jetzt wiederholt sich alles: Die Zahl α_2 gibt die Anzahl der Quadrierungen von $b^{2^{\alpha_1}} : 10$ an, die erforderlich sind, daß eben die Zahl 10 überschritten wird. Nachdem man also α_2-mal (5) quadriert hat, wird wieder mit 10 dividiert usw. Damit sind die α_i höchst einfach bestimmt, und aus (2) ergibt sich dann x.

Beispiel: $10^x = 2$.

In dem folgenden Schema ist die ganze Rechnung enthalten: 2 mußte $\alpha_1 = 2$mal quadriert werden, bis die 10 überschritten wurde. Die Zahl $2^{\alpha_1} = 16$ mit 10 dividiert gibt 1,6. Die Zahl 1,6 mußte $\alpha_2 = 3$mal quadriert werden, bis eine Zahl über 10, nämlich 42,9497 herauskam; jetzt wird wieder mit 10 dividiert usw.

	1	2	3	4	5	6		
$b = 2$	4	16					$\alpha_1 = 2$	$\frac{1}{2^2} = 0{,}250\ 0000$
1,6	2,56	6,5536	42,9497				$\alpha_2 = 3$	$\frac{1}{2^5} = 0{,}031\ 2500$
4,295	18,447						$\alpha_3 = 1$	$\frac{1}{2^6} = 0{,}015\ 6250$
1,845	3,404	11,587					$\alpha_4 = 2$	$\frac{1}{2^8} = 0{,}003\ 9062$
1,159	1,343	1,804	3,254	10,59			$\alpha_5 = 4$	$\frac{1}{2^{12}} = 0{,}000\ 2441$
1,059	1,121	1,25	1,56	2,43	5,9	34,8	$\alpha_6 = 6$	$\frac{1}{2^{18}} = 0{,}000\ 0038$
								$x = 0{,}301\ 0291$

In der letzten Spalte ist die Berechnung von $x = 0{,}30103$ gegeben. An Operationen sind nur Quadrierungen, Divisionen mit 2 und eine Addition erforderlich. Wiederum läßt sich zeigen, daß die Quadrierungen immer weniger genau zu sein brauchen, je weiter die Rechnung fortschreitet (s. oben). Vergleicht man diese Tabelle mit der vorhergehenden auf S. 19, so erkennt man die reziproke Natur der beiden gelösten Aufgaben an der Methode selbst. Natürlich kann man ebenso leicht für jede beliebige Zahl b und für jede Basis a den Wert von x berechnen, d. h. die Gleichung $a^x = b$ lösen. Ehe also im Unterricht überhaupt die Worte „Logarithmus" und „Numerus" ausgesprochen wurden, ist der Schüler durch diese Methoden in den Stand gesetzt, aus dem einen Wert den andern zu berechnen. Der funktionale Zusammenhang ist ihm jetzt etwas völlig Konkretes. Man vgl. hierzu meine Bemerkungen am Anfang von § 1. Nun erst würde ich raten, die Begriffe „Logarithmus" und „Numerus" einzuführen. Das weitere macht jetzt dem Lernenden, wie ich aus langjähriger Erfahrung weiß, keine Schwierigkeiten mehr.

§ 4. Berechnung der Zahl π nach Cusanus

Der deutsche Kardinal *Nicolaus Cusanus* (1401—1464) und nach ihm *Descartes* (1596—1650) haben einen von dem gewöhnlichen *Archimedischen* abweichenden Weg eingeschlagen, um die Zahl π zu berechnen. *Cusanus* ging vom regelmäßigen Dreieck aus und suchte ein regelmäßiges Vieleck von größerer Seitenzahl, aber von demselben Umfang. Dieses Vieleck wird in ein anderes umfanggleiches von noch größerer Seitenzahl übergeführt, so daß man in der Grenze zur Peripherie eines Kreises von demselben, also gegebenen Umfang kommt. Gelingt es, den Radius dieses Kreises zu berechnen, so hat man auch die Zahl π. *Cusanus* ist mit seinem Verfahren, soviel er sich auch Mühe gegeben hat, kaum über den *Archimedischen* Wert der Zahl π hinausgekommen; und doch gestattet gerade seine Methode, am raschesten die Zahl π auf elementarem Wege zu berechnen. Mit einem Minimum von geometrischen Betrachtungen erhält man die nötigen Formeln. Ja, wir werden in § 7 sehen, daß seine Methode einer sehr wesentlichen Erweiterung fähig ist, so daß man genau so wie $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\, 1$, die zyklometrischen Funktionen für ein beliebiges Argument berechnen kann, womit dann auch die Berechnung der trigonometrischen Funktionen gegeben ist[1]).

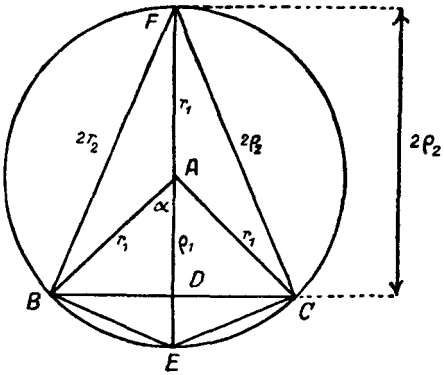

Fig. 3

Wir gehen von einem regelmäßigen n-Eck mit dem Umfang s aus und konstruieren nun ein regelmäßiges $2n$-, $4n$-, $8n$-, . . ., -Eck mit demselben Umfang. Diese umfangsgleichen Vielecke werden sich mehr und mehr einem Kreis nähern, und die Aufgabe ist es nun, seinen Radius zu berechnen. In der Fig. 3 sei ABC das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen n-Ecks (z. B. 6-Eck) vom Umfange s, also $BC = s : n$. Da sich die Radien ϱ_1, r_1 des dem n-Eck ein- und umbeschriebenen Kreises leicht berechnen lassen, so sehen wir diese als bekannt an. Es handelt sich jetzt darum, die entsprechenden Radien ϱ_2, r_2 für das umfangsgleiche Vieleck von $2n$-Seiten zu berechnen.

Zu diesem Zwecke verlängere man die Höhe $AD = \varrho_1$ des Dreiecks

[1]) Wegen des Folgenden vgl. man *K. Kommerell*, *„Elementare Berechnung der Zahl π und der trigonometrischen Funktionen"*, Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 25, 1917, S. 296ff. Wegen der Literatur vgl. man auch *M. Zacharias*, *Elementargeometrie*, Encykl. der math. Wiss. Bd. III_1, Heft 5, S. 928f., und *F. Rudio*, *„Geschichte von der Quadratur des Zirkels usw."* Leipzig 1892. *Tropfke*, „Geschichte der Elementarmathematik", Bd. 4, 2. Aufl. 1923, S. 213ff.

ABC über A hinaus um die Strecke r_1 bis F, dann ist ΔFBC das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen $2n$-Ecks vom Umfange $2s = 2n \cdot BC$. Das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen $2n$-Ecks vom Umfange s hat daher halb so große Seiten wie das Dreieck FBC. Es ist also $FD = 2\varrho_2$, $FB = 2r_2$. Aus der Figur ergibt sich nun unmittelbar die Formel

$$\varrho_2 = \frac{r_1 + \varrho_1}{2}, \tag{1}$$

aus der ϱ_2 zu berechnen ist. Schneidet FD den Kreis um A mit dem Radius r_1 in E, so ist $\sphericalangle FBE = 90^0$, und daher $FB^2 = FD \cdot FE$. Nun ist $FB = 2r_2$, $FD = 2\varrho_2$, $FE = 2r_1$, und daher $4r_2^2 = 2\varrho_2 \cdot 2r_1$, oder mit Wiederholung der Formel (1)

$$\boxed{\varrho_2 = \frac{r_1 + \varrho_1}{2},\ r_2 = +\sqrt{r_1 \varrho_2}.} \tag{2}$$

Entsprechend hat man für die Radien r_4, ϱ_4 des regelmäßigen $4n$-Ecks vom Umfange s die Formeln

$$\boxed{\varrho_4 = \frac{r_2 + \varrho_2}{2},\ r_4 = +\sqrt{r_2 \varrho_4}.} \tag{3}$$

So kann man der Reihe nach aus r_1, ϱ_1 die Radien r_2, ϱ_2; r_4, ϱ_4; r_8, ϱ_8; usw. berechnen.

Beispiel. Regelmäßiges Sechseck vom Umfang $s = 6$.

$$r_1 = 1,\ \varrho_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Man erhält jetzt folgende Tabelle, die mit 7stelligen Logarithmen berechnet wurde.

	r	ϱ	$\log r$	$\log \varrho$
6-*Eck*	$r_1 = 1{,}000\ 0000$	$0{,}866\ 0254$	$0{,}000\ 0000$	$9{,}937\ 5306$
12-*Eck*	$r_2 = 0{,}965\ 9258$	$0{,}933\ 0127$	$0{,}984\ 9438$	$9{,}969\ 8876$
24-*Eck*	$r_4 = 0{,}957\ 6623$	$0{,}949\ 4693$	$9{,}981\ 2123_5$	$9{,}977\ 4809$
48-*Eck*	$r_8 = 0{,}955\ 6118$	$0{,}953\ 5658$	$9{,}980\ 2815$	$9{,}979\ 3507$
96-*Eck*	$r_{16} = 0{,}955\ 1002$	$0{,}954\ 5888$	$9{,}980\ 0489$	$9{,}979\ 8163$
192-*Eck*	$r_{32} = 0{,}954\ 9724$	$0{,}954\ 8445$	$9{,}979\ 9908$	$9{,}979\ 9327$
384-*Eck*	$r_{64} = 0{,}954\ 9403_5$	$0{,}954\ 9084_5$	$9{,}979\ 9762_5$	$9{,}979\ 9617$
768-*Eck*	$r_{128} = 0{,}954\ 9324$	$0{,}954\ 9244$	$9{,}979\ 9726$	$9{,}979\ 9690$
1536-*Eck*	$r_{256} = 0{,}954\ 9304$	$0{,}954\ 9284$	$9{,}979\ 9717$	$9{,}979\ 9708$
3072-*Eck*	$r_{512} = 0{,}954\ 9299$	$0{,}954\ 9294$	$9{,}979\ 9714_5$	$9{,}979\ 9712$
6144-*Eck*	$r_{1024} = 0{,}954\ 9297$	$0{,}954\ 9296_5$	$9{,}979\ 9713_5$	$9{,}979\ 9713$

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Zahlen r ab-, die Zahlen ϱ zunehmen, daß jede r-Zahl größer als jede ϱ-Zahl ist, und daß die Differenz $r - \varrho$ gegen Null zu konvergieren scheint, kurz, daß eine *Intervallschachtelung* (siehe § 1) vorzuliegen scheint. Rechnet man nur mit 5- oder 4-stelligen Tafeln, was im Unterricht genügt, so ist man mit der Rechnung früher fertig. Ja, wir werden unten sehen, daß es genügt, ganz wenige Zeilen in der Tabelle zu berechnen.

Es ist nun aber auch sehr leicht, theoretisch einzusehen, daß eine Intervallschachtelung vorliegt.

Zunächst stellen wir die Größenfolge fest. Wir tragen zu größerer Übersichtlichkeit r_1, ϱ_1, als Abszissen auf einer Geraden auf und bezeichnen die Endpunkte der Strecken bezüglich mit den Buchstaben r_1 und ϱ_1. Nach (2) fällt dann der Punkt ϱ_2 in die Mitte zwischen r_1 und ϱ_1. Nach der zweiten Formel (2) fällt r_2 zwischen r_1 und ϱ_2. Dies folgt übrigens auch

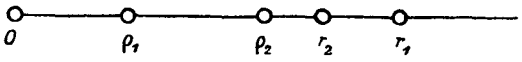

Fig. 4

anschaulich aus den Dreiecken FBD und FBE der Fig. 3. Im ersten ist $2r_2 = FB$ Hypotenuse, $2\varrho_2 = FD$ Kathete, im zweiten ist $2r_2 = FB$ Kathete, $2r_1 = FE$ Hypotenuse. Aus denselben Gründen liegt ϱ_4 in der Mitte zwischen r_2 und ϱ_2 und r_4 zwischen ϱ_4 und r_2 usw. Man hat also

$$r_1 > r_2 > r_4 > r_8 \cdots\cdots > \varrho_8 > \varrho_4 > \varrho_2 > \varrho_1. \tag{4}$$

Weiter ist nach (2)

$$\varrho_2^2 = \left(\frac{r_1 + \varrho_1}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = r_1 \varrho_2 = \frac{r_1 (r_1 + \varrho_1)}{2}$$

$$r_2^2 - \varrho_2^2 = \left(\frac{r_1 + \varrho_1}{2}\right)\left(r_1 - \frac{r_1 + \varrho_1}{2}\right) = \frac{r_1 + \varrho_1}{2} \cdot \frac{r_1 - \varrho_1}{2}.$$

Man hat also

$$r_2^2 - \varrho_2^2 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2}{4},\quad r_4^2 - \varrho_4^2 = \frac{r_2^2 - \varrho_2^2}{4},\quad r_8^2 - \varrho_8^2 = \frac{r_4^2 - \varrho_4^2}{4} \text{ usw.}$$

oder

$$\begin{gathered} r_2^2 - \varrho_2^2 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2}{4},\quad r_4^2 - \varrho_4^2 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2}{4^2},\quad r_8^2 - \varrho_8^2 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2}{4^3}, \\ r_{16}^2 - \varrho_{16}^2 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2}{4^4} \text{ usw.} \end{gathered} \tag{5}$$

und daraus, daß $r_n^2 - \varrho_n^2$, wenn n die Reihe der Zahlen 2, 4, 8, 16 ... durchläuft, mit wachsendem n unter jeden noch so kleinen Betrag *sehr rasch* heruntersinkt, oder daß

$$\lim_{n \to \infty} (r_n - \varrho_n^2) = 0$$

ist. Nach § 1 liegt also wirklich eine Intervallschachtelung vor, oder die

Zahlenfolgen r_n und ϱ_n sind konvergent und streben *demselben* Grenzwert R zu, d. h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \varrho_n = R. \tag{6}$$

Beschreibt man jetzt um den Mittelpunkt des Vielecks, das die Radien r_n und ϱ_n besitzt, Kreise mit diesen Radien, so folgt

$$2\pi r_n > s > 2\pi \varrho_n, \tag{7}$$

da die Peripherie des umbeschriebenen Kreises größer ist als der Vielecksumfang s, und dieser wieder größer als die Peripherie des einbeschriebenen Kreises. Geht man zur Grenze über, so folgt aus (7) und (6)

$$s = 2R\pi, \quad \pi = \frac{s}{2R}, \tag{8}$$

eine Gleichung, die zeigt, daß der Grenzwert R der beiden Zahlenfolgen r_n und ϱ_n der Radius des Kreises ist, der den Umfang s besitzt.

Benutzt man die Zahlentabelle, die für $s = 6$ berechnet ist, so folgt nach (7), daß π zwischen den Zahlen $3 : r_{512}$ und $3 : \varrho_{512}$ liegt. Rechnet man diese Werte aus, so findet man, daß π zwischen den Zahlen 3,141592 und 3,141594 liegt. Man hat also auf 5 *Dezimalstellen genau*

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

Bemerkung. Die Inhalte der umfangsgleichen Vielecke von n, $2n$, $4n$, ... Ecken sind

$$\frac{s}{2}\cdot\varrho_1, \ \frac{s}{2}\cdot\varrho_2, \ \frac{s}{2}\varrho_4, \ldots \tag{9}$$

und bilden eine konvergente Zahlenfolge. Das Maximum aller dieser Inhalte besitzt der Kreis mit dem Radius R. Sein Inhalt ist $^s/_2 R$ oder nach (8) $R^2\pi$. Man erhält so die bekannte Inhaltsformel für den Kreis und den

Satz. Der Kreis hat einen größeren Inhalt als jedes regelmäßige Vieleck von demselben Umfang.

Die obige Tabelle ist mit Hilfe von Logarithmen berechnet worden. Will man diese vermeiden, so kann man sich der in § 1, (20) abgeleiteten Identität bedienen, die auf (2) angewendet,

$$r_{2k} = \sqrt{\left(\frac{r_k + \varrho_{2k}}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_k - \varrho_{2k}}{2}\right)^2} \tag{10}$$

gibt. Es ist die früher vielgebrauchte „*Methode der Viertelsquadrate*", für die besondere Tafeln berechnet wurden. Aus (10) kann nun mit Hilfe der Quadratzahlentabelle r_{2k} bequem berechnet werden. Dies hat den Vorteil, daß sehr bald das zweite Glied unter der Wurzel vernachlässigt werden kann, da ja r_k und ϱ_{2k} sich sehr rasch dem Grenzwert R nähern. So ist nach der Tabelle schon

$$r_{32} = \frac{r_{16} + \varrho_{32}}{2}.$$

Also von der Stelle ab, wo das Glied

$$\left(\frac{r_k - \varrho_{2k}}{2}\right)^2$$

für die verlangte Genauigkeit nicht mehr in Betracht kommt, kann man statt

$$r_{2k} = \sqrt{r_k \varrho_{2k}} \text{ sehr genau } r_{2k} = \frac{r_k + \varrho_{2k}}{2}$$

setzen, d. h. das arithmetische Mittel statt des geometrischen nehmen, wodurch die Rechnung ganz wesentlich einfacher wird. Ja, wir wollen zeigen, daß man eben von dieser Stelle ab überhaupt nicht mehr weiter zu rechnen braucht, indem es gelingt, R in sehr enge Grenzen einzuschließen.

Rascher konvergierende Folgen für den Grenzwert R.

Durch die Formeln (2) und (3)

$$\varrho_2 = \frac{r_1 + \varrho_1}{2}, \quad r_2 = \sqrt{r_1 \varrho_2}, \tag{11}$$

$$\varrho_4 = \frac{r_2 + \varrho_2}{2}, \quad r_4 = \sqrt{r_2 \varrho_4}, \tag{12}$$

usw. wurden die beiden Zahlenfolgen r_k und ϱ_k definiert. Wir ersetzen nun wie oben in der zweiten Formel (11) das geometrische Mittel durch das arithmetische, so daß nach dem Satz auf S. 12

$$r_2 < \frac{r_1 + \varrho_2}{2},$$

und hieraus

$$r_1 - r_2 > r_1 - \frac{r_1 + \varrho_2}{2}, \quad r_1 - r_2 > \frac{r_1 - \varrho_2}{2}$$

wird. Da nach der ersten Formel (11) $r_1 = 2\varrho_2 - \varrho_1$ ist, so gibt die letzte Ungleichung

$$r_1 - r_2 > \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2}, \tag{13}$$

oder

$$2r_2 + \varrho_2 < 2r_1 + \varrho_1. \tag{14}$$

Die Folge von Zahlen $2r_k + \varrho_k$, $(k = 1, 4, 8 \ldots)$ ist also *monoton fallend* und strebt dem Grenzwert $3R$ zu, da r_k und ϱ_k gegen R streben. Es ist also für jedes k

$$R < \frac{2r_k + \varrho_k}{3}$$

eine Ungleichung, die wir noch auf die Form bringen

$$R < r_k - \frac{1}{3}(r_k - \varrho_k). \tag{15}$$

Damit ist eine wirkliche, und wie sich unten zeigen wird, sehr beträchtliche Verschärfung für die Abschätzung von R gegeben: R war ja $< r_k$

und (15) zeigt, daß R noch kleiner ist als die rechte Seite von (15), die ja $< r_k$ ist.

Aus den drei letzten Formeln (11) und (12) nämlich

$$r_2 = \sqrt{r_1 \varrho_2},\quad r_4 = \sqrt{r_2 \varrho_4},\quad \varrho_4 = \frac{r_2 + \varrho_2}{2} \tag{16}$$

eliminieren wir ϱ_2 und ϱ_4. Man erhält zunächst

$$\varrho_2 = \frac{r_2^2}{r_1},\ \varrho_4 = \frac{r_4^2}{r_2},$$

und jetzt durch Eintragen in die letzte Gleichung (16)

$$\frac{2r_4^2}{r_2} = r_2 + \frac{r_2^2}{r_1} \quad \text{oder}$$

$$2r_1 r_4^2 - r_2^2 r_1 - r_2^3 = 0\,. \tag{17}$$

Hierfür kann man

$$\frac{r_2 - r_4}{r_1 - r_2} = \frac{r_4^2}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_4)} \tag{18}$$

schreiben, wie man durch Fortschaffen der Nenner sofort erkennt. Da nun $r_1 > r_4$, $r_2 > r_4$ ist, so wird die rechte Seite in (18) vergrößert, wenn man r_1 und r_2 durch r_4 ersetzt: es ist also

$$\frac{r_2 - r_4}{r_1 - r_2} < \frac{1}{4} \quad \text{oder}$$

$$4r_2 - r_1 < 4r_4 - r_2\,. \tag{19}$$

Die Zahlenfolge $4r_{2k} - r_k$, $(k = 1, 2, 4, 8 \ldots)$ ist eine monoton wachsende mit dem Grenzwert $3R$. Man hat also für jedes k

$$\frac{4r_{2k} - r_k}{3} < R$$

oder

$$r_{2k} - \frac{r_k - r_{2k}}{3} < R, \tag{20}$$

womit wieder eine Verschärfung für die Abschätzung von R gegeben ist, da ja $r_{2k} > R$ ist. Nach (15) und (20) hat man so die wichtige Formel:

$$\boxed{r_{2k} - \frac{r_k - r_{2k}}{3} < R < r_k - \frac{r_k - \varrho_k}{3}\,.} \tag{I}$$

Um die Tragweite dieser Formel zu erkennen, setze man $k = 8$, d. h. man gehe in der Tabelle (S. 22) bis zum regelmäßigen 96-Eck. Man findet dann

$$R > 0{,}9551002 - \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}0005116 = 0{,}9549297$$

$$R < 0{,}9556118 - \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}0020460 = 0{,}9549298$$

und sieht, wie groß die gewonnene Verschärfung ist. *Statt in der Tabelle die Rechnung zu Ende zu führen, also bis zum 6144-Eck, braucht man nur bis zum 96-Eck zu gehen, um π so genau zu berechnen, als es siebenstellige Tafeln erlauben.*

Die Formel (I) gibt eine neue Intervallschachtelung, welche den Grenzwert R viel schneller erfaßt als die Schachtelung (ϱ_k, r_k).

Bemerkung 1. Aus der ersten Formel (11) folgt, wenn das arithmetische Mittel durch das geometrische ersetzt wird, nach dem Satz auf S. 12.

$$\varrho_2 > \sqrt{r_1 \varrho_1}, \quad \varrho_2^2 > r_1 \varrho_1,$$

und, da nach (11) $r_2^2 = r_1 \varrho_2$ ist, durch Multiplikation

$$\varrho_2 r_2^2 > \varrho_1 r_1^2. \tag{21}$$

Die Zahlen $\varrho_k r_k^2$ bilden also eine monoton wachsende Folge mit dem Grenzwert R^3. Man hat also für jedes k

$$R^3 > \varrho_k r_k^2, \quad \text{oder} \tag{22}$$

$$\log r_k - \frac{1}{3}(\log r_k - \log \varrho_k) < \log R, \tag{23}$$

womit eine andere untere Schranke für R (vgl. (I)) gefunden ist. Für $k = 8$ (s. oben) würde man finden

$$R > 0{,}9549293.$$

Bemerkung 2. Die Formeln (2) sind ganz entsprechend gebaut, wie die bekannten Formeln

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_n} + \frac{1}{u_n}\right), \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}}, \tag{24}$$

wo u_n den Umfang des einem bestimmten Kreis einbeschriebenen regelmäßigen, U_n den Umfang des umbeschriebenen n-Ecks bedeutet; übrigens lassen sich diese Formeln direkt aus (2) herleiten. Da nun (I) rein arithmetisch aus (2) abgeleitet wurde, so gelten für (24) ganz entsprechend, wenn U den gemeinsamen Grenzwert bedeutet, dem u_n und U_n mit wachsendem n zustreben, die Ungleichungen

$$\frac{1}{u_{2k}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{2k}}\right) > \frac{1}{U} < \frac{1}{u_k} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{U_k}\right). \tag{25}$$

Die Ungleichungen (I) spielen bei uns dieselbe Rolle, wie die, welche *Huygens* im Anschluß an die *Archimedische* Methode in seiner berühmten Schrift „de circuli magnitudine inventa" (1654) entwickelt hat, und auf die wir im nächsten Paragraphen näher eingehen werden. Doch sei bemerkt, daß die Gleichungen (25) nicht die Formeln von *Huygens* sind; diese lauten vielmehr

$$u_{2n} + \frac{u_{2n} - u_n}{3} < U < U_{2n} - \frac{U_{2n} - u_n}{3}, \tag{26}$$

wie sich im nächsten Paragraphen zeigen wird.

§ 5. Huygens: „De circuli magnitudine inventa". Die Formeln von Huygens[1])

Archimedes ist der erste Mathematiker gewesen, der einwandfrei den Umfang des Kreises in Grenzen einschloß. Bezeichnet man mit u_n den Umfang des dem Kreis einbeschriebenen, mit U_n den des umbeschriebenen regulären n-Ecks, so berechnet *Archimedes* u_6, u_{12}, u_{24}, u_{48}, u_{96} und ebenso $U_6 \ldots U_{96}$. Die Zahlen der ersten Reihe wachsen mit dem Index, die Zahlen der zweiten Reihe nehmen mit ihm ab. Der Umfang U des Kreises ist größer als jedes $u_\varkappa$ und kleiner als jedes U_λ. *Archimedes* findet so, indem er bis zum regulären 96-Eck aufstieg, als untere Grenze der Zahl π den Wert $3\frac{10}{71} = 3{,}14084 \ldots$ und als obere Grenze $3\frac{1}{7} = 3{,}14285 \ldots$ Fast zwei Jahrtausende ist die klassische Methode des *Archimedes* die beherrschende gewesen. In diesem ganzen Zeitraume war das Bestreben der Mathematiker darauf gerichtet, die Zahl π in immer engere Grenzen einzuschließen, indem sie zu Polygonen von immer mehr Seiten aufstiegen. Neue Gedanken finden sich erst in den Arbeiten von *Snellius* (1580—1626) und namentlich *Huygens* (1629—1695). In einer Jugendarbeit aus dem Jahre 1654, die den Titel „De circuli magnitudine inventa" führt, zeigt *Huygens*, wie man durch lineare Kombination der *Archimedischen* Polygonzahlen die Zahl π in viel engere Grenzen einschließen kann, als es *Archimedes* möglich war, ohne daß es nötig wäre, Vielecke von höherer Seitenzahl zu benützen. Während man z. B. nach *Archimedes* mit Hilfe des 96-Ecks nur zwei richtige Dezimalstellen erhält, so kann *Huygens* zeigen, daß schon mit Hilfe des 60-Ecks π bis auf neun Dezimalstellen genau berechnet werden kann. Man muß sich wundern, daß die klassische und ganz im Geiste des großen Meisters *Archimedes* geschriebene Abhandlung von *Huygens* nirgends in den Schulbüchern verwertet wird und doch „ist diese Abhandlung", wie *Rudio*[2]) mit Recht sagt, „nicht nur für die Kreismessung eine geradezu epochemachende, sondern sie gehört auch unstreitig zu den schönsten und bedeutendsten elementargeometrischen Arbeiten, die jemals geschrieben worden sind; sie wird, wie die Abhandlung des *Archimedes*, ihren Wert behalten, auch wenn die darin niedergelegten Resultate durch die Mittel der Analysis heutzutage auf viel kürzerem Wege gewonnen werden können." Wie *Huygens* zu seinen Ergebnissen gelangt ist, gibt er nicht an. Es ist aber Grund genug da zu der Annahme, daß er durch die bekannten Untersuchungen von *Archimedes* über das Parabelsegment[3]) die Anregung zu seiner Arbeit erhalten hat. In der Tat lassen sich die Hauptsätze von *Huygens* mit Hilfe der Pa-

[1]) Vgl. hierzu mein Programm „Über die Lehre von den Proportionen und von dem Flächeninhalte", Stuttgart, Friedrich-Eugens-Realschule, 1912, S. 21 f.

[2]) Vgl. die Fußnote zu S. 21.

[3]) Vgl. § 19.

rabel sehr einfach beweisen. Des weiteren bedient sich *Huygens* an einer Stelle (Lehrsatz 14) wirklich der Parabel; es ist ihm hier offenbar nicht gelungen, für den durch Betrachtungen an der Parabel gewonnenen Satz nachträglich einen rein elementargeometrischen Beweis zu finden.

Nun soll gezeigt werden, wie in der Tat die wichtigsten Ergebnisse von *Huygens* sehr einfach mit Hilfe der bekannten Sätze über das Parabelsegment abgeleitet werden können. Vielleicht kann diese Darstellung dazu dienen, die *Huygens*schen Sätze auch für den Unterricht zu erschließen.

Sei AH (s. Fig. 5) der zu der Kreissehne BC senkrechte Durchmesser, und werde der Inhalt des Kreissegments BAC kurz mit Segment BC bezeichnet, dann gilt der

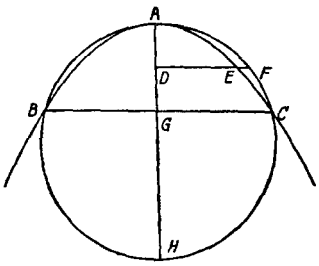

Fig. 5

Satz 1. $\quad$ *Segment* $BC > \frac{4}{3}$ *Dreieck* ABC.

Beweis. Man zeichne eine Parabel, die A zum Scheitel, AH zur Achse hat und die durch B und C hindurchgeht. Da nun bekanntlich das Parabelsegment $BAC = \frac{4}{3}\triangle ABC$ ist, so ist der Satz bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß der Parabelbogen BAC ganz innerhalb des Kreises liegt. Dies kann aber nach *Huygens*[1]) selbst leicht so bewiesen werden. Ist G die Mitte B von BC, so ist nach dem Sehnensatz

$$GC^2 = AG \cdot GH.$$

In der Parabelgleichung ($y^2 = 2px$) ist also $GH = 2p$. Errichtet man weiter in einem Punkt D von AG das Lot auf AG, das die Parabel in E, den Kreis in F schneidet, so ist nach der Parabeleigenschaft

$$DE^2 = AD \cdot GH$$

und nach dem Sehnensatz

$$DF^2 = AD \cdot DH.$$

Da nun $GH < DH$ ist, so folgt

$$DE < DF,$$

was noch zu beweisen übriggeblieben ist.

Ist f_n der Inhalt des einem Kreise einbeschriebenen regulären n-Ecks, F der Inhalt des Kreises selbst, so gilt der

Satz 2. $\quad F > f_{2n} + \frac{f_{2n} - f_n}{3}$.

[1]) a. a. O. Lehrsatz 14.

Beweis. Ist in Fig. 6 BC die Seite des regulären n-Ecks, A die Mitte des zu BC gehörigen Bogens, so ist

$$F = f_n + n \cdot \text{Segment } BC.$$

Nach Satz 1 aber hat man

$$n \text{ Segment } BC > \frac{4}{3}(f_{2n} - f_n);$$

also ist

$$F > f_n + \frac{4}{3}(f_{2n} - f_n)$$

oder

$$F > f_{2n} + \frac{f_{2n} - f_n}{3} \text{ w. z. b. w.}$$

Wie man sieht, wird die Kreisfläche sozusagen nach der *Simpson*schen Regel quadriert, indem für den Kreisbogen jedes Kreissegments ein Parabelbogen gesetzt wird.

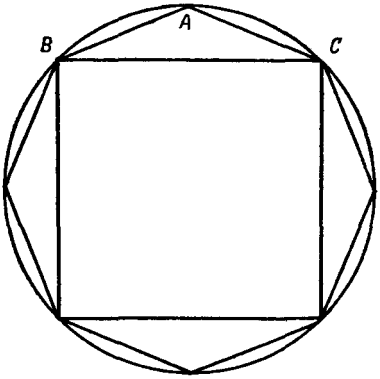

Fig. 6

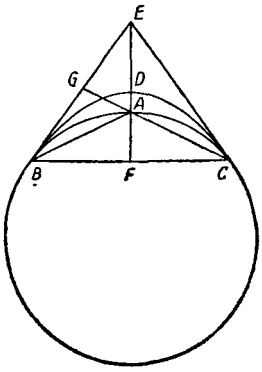

Fig. 7

Nachdem so eine *untere* Grenze für den Kreisinhalt gefunden ist, kann man auf entsprechendem Wege auch eine *obere* Grenze erhalten.

Sei wieder BC (Fig. 7) eine Kreissehne, und E der Schnittpunkt der in B und C an den Kreis gezogenen Tangenten, so hat man den

Satz 3. *Segment* $BC < \frac{2}{3}$ *Dreieck* EBC.

Beweis. Man konstruiere eine Parabel, die EB in B, EC in C berührt, und deren Scheitel D auf EF liegt. Es ist nun wieder eine bekannte Eigenschaft der Parabel, daß das Parabelsegment BDC gleich $^2/_3$ des Dreiecks EBC ist. Der Satz ist nun bewiesen, wenn man zeigen kann, daß D zwischen E und dem Scheitel A des Kreissegments liegt; denn dann ist das Kreissegment kleiner als das Parabelsegment. Ist F die Mitte von BC, so ist $ED = DF$, da EC Tangente an die Parabel ist;

es bleibt jetzt nur noch zu beweisen übrig; daß $EA > AF$ ist. Zu diesem Zwecke fällt man AG senkrecht auf EB. Nach dem Tangentensehnenwinkelsatz ist jetzt

$$\sphericalangle GBA = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$$

und daher $AG = AF$. Nun ist aber $EA > AG$ also auch $EA > AF$, was noch zu zeigen war.

Sei wieder f_n der Inhalt des dem Kreis einbeschriebenen regulären n-Ecks, F_n der Inhalt des umbeschriebenen und F der Kreisinhalt, so gilt der

Satz 4. $\quad F < \frac{2}{3} F_n + \frac{1}{3} f_n.$

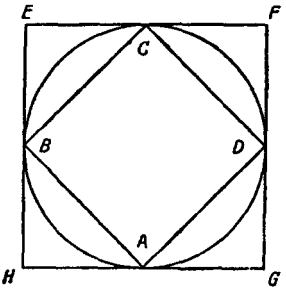

Fig. 8

Sei BC (s. Fig. 8) eine Seite des regulären einbeschriebenen n-Ecks, so ist

$$F = f_n + n \cdot \text{Segment } BC$$

und nach Satz 3

$$n \cdot \text{Segment } BC < \frac{2n}{3} \cdot \Delta EBC = \frac{2}{3}(F_n - f_n),$$

wenn E der Schnittpunkt der Kreistangenten in B und C ist. Also

$$F < f_n + \frac{2}{3}(F_n - f_n) \quad \text{oder}$$

$$F < \frac{2}{3} F_n + \frac{1}{3} f_n \quad \text{w. z. b. w.}$$

Damit ist auch eine obere Grenze für den Kreisinhalt gefunden. Aus den für den Kreis*inhalt* gefundenen Grenzen

$$F > f_{2n} + \frac{f_{2n} - f_n}{3} \tag{I}$$

$$F < \frac{2}{3} F_n + \frac{1}{3} f_n \tag{II}$$

kann man nun leicht auch Grenzen für den Kreis*umfang* erhalten.

Ist r der Radius des Kreises, so hat man

$$f_{2n} = n r^2 \sin \frac{\pi}{n}$$

und

$$s_n = 2r \sin \frac{\pi}{n},$$

wo s_n die Seite des dem Kreis einbeschriebenen regulären n-Ecks ist; es ist daher

$$f_{2n} = \frac{r}{2} u_n. \tag{1}$$

Ebenso zeigt man leicht, daß

$$F_{2n} = \frac{r}{2} U_{2n} \tag{2}$$

ist. Aus (I) und (II) ergibt sich jetzt

$$r^2\pi > f_{4n} + \frac{f_{4n} - f_{2n}}{3},$$

$$r^2\pi < \frac{2}{3} F_{2n} + \frac{1}{3} f_{2n}$$

und, wenn man (1) und (2) benützt,

$$r^2\pi > \frac{r}{2} u_{2n} + \frac{r}{2} \frac{u_{2n} - u_n}{3},$$

$$r^2\pi < \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{2} U_{2n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{2} u_n$$

oder

$$2r\pi > u_{2n} + \frac{u_{2n} - u_n}{3},$$

$$2r\pi < \frac{2}{3} U_{2n} + \frac{1}{3} u_n$$

oder endlich, wenn man den Umfang des Kreises mit U bezeichnet

$$U > u_{2n} + \frac{u_{2n} - u_n}{3}, \tag{III}$$

$$U < \frac{2}{3} U_{2n} + \frac{1}{3} u_n = U_{2n} - \frac{U_{2n} - u_n}{3}. \tag{IV}^{1})$$

Die Berechnung der Zahl π gestaltet sich nun wie folgt. Mittelst der bekannten Formeln

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_n} + \frac{1}{u_n}\right), \tag{V}$$

$$\frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}}, \tag{VI}$$

die man sehr rasch trigonometrisch beweist, erhält man, etwa ausgehend von u_6 und U_6, der Reihe nach u_{12}, U_{12}; u_{24}, U_{24} usw. In der folgenden Tabelle sind diese Zahlen angegeben, unter der Voraussetzung, daß der Kreisdurchmesser = 1 also $U = \pi$ gesetzt ist.

Polygon	u	U
6-Eck	3,000000	3,464102
12-Eck	3,105828	3,215390
24-Eck	3,132629	3,159661
48-Eck	3,139350	3,146086
96-Eck	3,141028	3,142715

[1]) Huygens gibt in Lehrsatz 9 $U < \frac{1}{3} U_n + \frac{2}{3} u_n$, d. h. eine noch etwas kleinere obere Grenze.

Setzt man jetzt beispielsweise in (III) und (IV) $n = 24$, d. h. geht man bis zum ein- und umbeschriebenen 48-Eck, so folgt mit Hilfe der Tabelle

$$\pi = U > 3{,}14159,$$

$$\pi = U < 3{,}14160$$

also $$\pi = 3{,}14159\ldots$$

d. h. *bis auf fünf Dezimalstellen genau,* während man nach *Archimedes* selbst mit dem 96-Eck, wie die Tabelle zeigt, nur zwei richtige Dezimalstellen erhält.

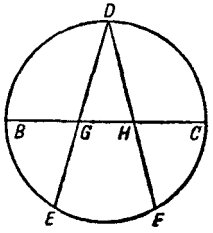

Fig. 9

Huygens hat seine Methode noch zu einer eleganten und für fast alle Fälle ausreichenden *Näherungskonstruktion* für den Umfang eines Kreises verwendet. Da diese schöne und einfache Konstruktion wenig bekannt zu sein scheint, so sei sie hier mitgeteilt. BC (s. Fig. 9) sei ein Durchmesser des Kreises. Man teile den Halbkreis BC durch D in zwei, den andern durch E und F in drei gleiche Teile und ziehe die Verbindungslinien DE und DF, welche BC in G und H schneiden mögen. *Huygens* zeigt jetzt, daß $GD + GH$ um ein Unbedeutendes größer ist als der vierte Teil der Kreisperipherie, nämlich um weniger als $\frac{1}{5000}$ des Durchmessers BC.

Wegen des Beweises, der ja auch trigonometrisch leicht zu führen wäre, sei auf die Abhandlung von *Huygens* (*Rudio,* a. a. O. S. 105) verwiesen. Noch möge erwähnt werden, daß die *Huygens*sche Abhandlung (*Rudio,* a. a. O. S. 116f.) auch die schon *Cusanus* bekannte sehr genaue Näherungskonstruktion für die Rektifikation eines beliebigen Kreisbogens enthält, die auch heute noch verwendet wird:

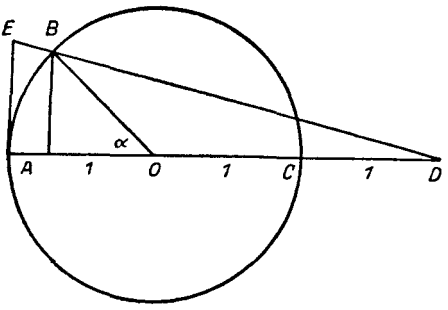

Fig. 10

AB sei der zu rektifizierende Bogen eines Kreises mit dem Radius $= 1$, α der zugehörige Zentriwinkel, dann mache man $AO = OC = CD = 1$ und schneide DB mit der in A konstruierten Kreistangente in E, dann ist AE sehr nahe gleich $arc\,AB = \alpha$. Durch leichte Rechnung findet man

$$AE = \frac{3\sin\alpha}{2 + \cos\alpha}. \tag{3}$$

Wir werden sehen (§ 7), daß für $arc\,AB = \alpha$ gilt

$$\alpha > \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}, \tag{4}$$

und werden den Fehler abschätzen, den man begeht, wenn $\alpha = \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$ gesetzt wird.

§ 6. Approximation der Kreisperipherie durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige Vielecke

Wie in § 5 gezeigt worden ist, benutzt *Huygens* bei seiner Approximation der Kreisperipherie zwei aufeinanderfolgende Vielecke. Es liegt nahe zu untersuchen, ob nicht durch lineare Kombination der Umfänge von allgemein k aufeinanderfolgenden Polygonen der archimedischen Reihe die Kreisperipherie noch schärfer angenähert werden kann. Dies ist, wie jetzt ausgeführt werden soll, sehr weitgehend der Fall. Als Spezialfall wird sich dann wieder die Annäherung von *Huygens* ergeben.

Setzt man den Durchmesser d des Kreises $= 1$ und zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{\pi}{n}, \tag{1}$$

so ist

$$u_n = n\sin\alpha,\ u_{2n} = 2n\sin\frac{\alpha}{2},\ u_{4n} = 4n\sin\frac{\alpha}{4},\ \ldots\ u_{2^k n} = 2^k n\sin\frac{\alpha}{2^k}, \tag{2}$$

wo wieder u_n den Umfang des einbeschriebenen regulären n-Ecks bedeutet. Entwickelt man die Sinusfunktionen in (2) in Potenzreihen, so folgt

$$\begin{aligned}
u_n &= n\left\{\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^{k+1}\alpha^{2k+3}}{(2k+3)!} + \ldots\right\},\\
u_{2n} &= 2n\left\{\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{\alpha^5}{2^5\cdot 5!} - \ldots + \frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)!} + \frac{(-1)^{k+1}\alpha^{2k+3}}{2^{2k+3}\cdot(2k+3)!} + \ldots\right\},\\
u_{4n} &= 4n\left\{\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha^3}{4^3\cdot 3!} + \ldots\right\}, \qquad (3)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_{2^k n} &= 2^k n\left\{\frac{\alpha}{2^k} - \frac{\alpha^3}{2^{k\cdot 3}\cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}\alpha^{2k+3}}{2^{k(2k+3)}\cdot(2k+3)!} + \ldots\right\}.
\end{aligned}$$

Man multipliziere nun diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, x_1, x_2 \ldots x_k$ addiere sie und bestimme die Unbekannten $x_1 \ldots x_k$ so, daß die Potenzen mit $\alpha^3, \alpha^5 \ldots \alpha^{2k+1}$ alle herausfallen. Man erhält so

$$u_n + x_1 u_{2n} + x_2 u_{4n} + \ldots x_k u_{2^k n} = n\alpha\,(1 + x_1 + x_2 + \ldots \quad x_k) +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1} \cdot \alpha^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot n \left\{ 1 + \frac{x_1}{2^{2k+2}} + \frac{x_2}{2^{2(2k+2)}} + \ldots + \frac{x_k}{2^{k(2k+2)}} \right\} + \quad (4)$$

$$+ \frac{(-1)^{k+2} \cdot \alpha^{2k+5}}{(2k+5)!} \cdot n \left\{ 1 + \frac{x_1}{2^{2k+4}} + \frac{x_2}{2^{2(2k+4)}} + \ldots + \frac{x_k}{2^{k(2k+4)}} \right\} + \ldots$$

und zur Bestimmung der k Unbekannten $x_1 \ldots x_k$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
1 + \frac{x_1}{2^2} + \frac{x_2}{2^4} + \frac{x_3}{2^6} + \ldots + \frac{x_k}{2^{2k}} &= 0, \\
1 + \frac{x_1}{2^4} + \frac{x_2}{2^8} + \ldots \qquad\quad + \frac{x_k}{2^{3 \cdot 2k}} &= 0, \\
1 + \frac{x_1}{2^6} + \frac{x_2}{2^{12}} + \ldots \qquad\quad + \frac{x_k}{2^{3 \cdot 2k}} &= 0, \\
1 + \frac{x_1}{2^{2k}} + \frac{x_2}{2^{2 \cdot 2k}} + \frac{x_3}{2^{3 \cdot 2k}} + \ldots \frac{x_k}{2^{k \cdot 2k}} &= 0.
\end{aligned} \quad (5)$$

Setzt man jetzt

$$\varphi(z) = 1 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots x_k z^k, \quad (6)$$

so folgt aus (5), daß $\varphi(z) = 0$ ist für $z = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^4} \ldots \frac{1}{2^{2k}}$. Da weiter $\varphi(0) = 1$ ist, so ergibt sich

$$\varphi(z) = \left(\frac{1}{2^2} - z\right)\left(\frac{1}{2^4} - z\right)\left(\frac{1}{2^6} - z\right) \ldots \left(\frac{1}{2^{2k}} - z\right) \cdot 2^2 \cdot 2^4 \ldots 2^{2k} \quad (7)$$

oder

$$\varphi(z) = (1 - 2^2 z)(1 - 2^4 z) \ldots (1 - 2^{2k} z). \quad (8)$$

Damit sind die Unbekannten $x_1 \ldots x_k$ alle bestimmt, denn x_λ ist der Koeffizient von z^λ in $\varphi(z)$. Für später sei noch bemerkt:

$$\varphi(1) = 1 + x_1 + x_2 + \ldots\ldots \qquad + x_k, \quad (9)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{2k+2}}\right) = 1 + \frac{x_1}{2^{2k+2}} + \frac{x_2}{2^{2(2k+2)}} + \ldots + \frac{x_k}{2^{k(2k+2)}}, \text{ u. s. w.} \quad (10)$$

Dividiert man (4) mit $1 + x_1 + x_2 \ldots x_k = \varphi(1)$ und beachtet (1) und (10), so folgt

$$\frac{u_n + x_1 u_{2n} + x_2 u_{4n} + \ldots x_k u_{2^k n}}{\varphi(1)} = \pi + R, \quad (11)$$

wo zur Abkürzung

$$R = \frac{(-1)^{k+1} \alpha^{2k+3} \cdot \varphi\left[\frac{1}{2^{2k+2}}\right]}{(2k+3)!\qquad \varphi(1)} \cdot n + \frac{(-1)^{k+2} \cdot \alpha^{2k+5} \cdot \varphi\left[\frac{1}{2^{2k+4}}\right]}{(2k+5)!\qquad \varphi(1)} \cdot n + \ldots \quad (12)$$

gesetzt ist. Es ist jetzt noch das Restglied R in (11) abzuschätzen.

Zu diesem Zwecke beachte man, daß die Reihe (12) eine alternierende ist und daß das erste Glied immer das negative Zeichen hat. Denn nach (8) ist $\varphi\left[\frac{1}{2^{2k+2}}\right]$ positiv und zwar kleiner als 1 und $\varphi(1)$ bei geradem k positiv, bei ungeradem k negativ, während $(-1)^{k+1}$ bei geradem k negativ, bei ungeradem positiv ist. Das erste Glied in (12) ist also negativ, das zweite positiv usw. Wir wollen weiter zeigen, daß jedes Glied in (12) absolut genommen kleiner als das vorhergehende ist. Heißt z. B. g_1 das erste Glied, g_2 das zweite Glied in (12), so hat man

$$\left|\frac{g_2}{g_1}\right| = \frac{a^2}{(2k+4)(2k+5)} \cdot \frac{\varphi\left[\frac{1}{2^{2k+4}}\right]}{\varphi\left[\frac{1}{2^{2k+2}}\right]} \tag{13}$$

Nach (7) ist nun

$$\frac{\varphi\left[\frac{1}{2^{2k+4}}\right]}{\varphi\left[\frac{1}{2^{2k+2}}\right]} = \frac{\frac{1}{2^{2k}}\left(1-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2^{2k-2}}-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)}{\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{2^{2k-2}}-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)\left(\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{2k}}\left(1-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)}{\left(\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{2^{2k+2}}\right)} = \frac{1-\frac{1}{2^{2k+2}}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2k+2}}\right) < \frac{4}{3},$$

also nach (13) und (1)

$$\left|\frac{g_2}{g_1}\right| < \frac{4\pi^2}{3 \cdot n^2 (2k+4)(2k+5)}.$$

Da n mindestens gleich 3 und k größer als 0 ist, so folgt

$$\left|\frac{g_2}{g_1}\right| < \frac{4 \cdot \pi^2}{3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5} \quad \text{d. h.} \quad \left|\frac{g_2}{g_1}\right| < 1.$$

Das zweite Glied in (12) ist also absolut genommen kleiner als das erste und ebenso zeigt man, daß jedes Glied in (12) seinem absoluten Betrage nach kleiner als das vorhergehende ist; da weiter die Reihe (12) alternierend ist, so ist R gleich einem Bruchteile ϑ des ersten Gliedes in (12); es ist also

$$R = \frac{\vartheta (-1)^{k+1} a^{2k+3} \cdot \varphi\left[\frac{1}{2^{2k+2}}\right]}{(2k+3)! \qquad \varphi(1)} n$$

oder, da $\varphi\left(\frac{1}{2^{2k+2}}\right)$ positiv und kleiner als 1 ist,

$$R = \frac{\vartheta_0 (-1)^{k+1} \cdot a^{2k+3}}{(2k+3)! \qquad \varphi(1)} \cdot n, \tag{14}$$

wo ϑ_0 ein positiver echter Bruch ist. R ist eine negative Zahl und es ist daher nach (11)

$$\pi > \frac{u_n + x_1 u_{2n} + x_2 u_{4n} + \cdots x_n u_{2^k n}}{\varphi(1)}, \tag{15}$$

und weiter nach (14) und (1)

$$\left|\pi - \frac{u_n + x_1 u_{2n} + \ldots x_n u_2{}^k{}_n}{\varphi(1)}\right| < \frac{\pi^{2k+3}}{n^{2k+2} \cdot (2k+3)! \,|\, \varphi(1)\,|}. \tag{16}$$

Die Größe

$$\varepsilon = \frac{\pi^{2k+3}}{n^{2k+2}(2k+3)! \,|\, \varphi(1)\,|} \tag{17}$$

gibt eine obere Grenze für den Fehler, den man begeht, wenn in (15) das Zeichen $>$ durch das Zeichen $=$ ersetzt wird. ε hängt nach (17) von n und k ab; da $|\varphi(1)|$ mit wachsendem k nach (8) sehr rasch wächst, so sieht man, daß ε schon bei mäßig großen Werten von n und k außerordentlich klein ist.

1. *Beispiel.* $k = 1$; $\varphi(z) = 1 - 4z$; $x_1 = -4$; $\varphi(1) = -3$.

Aus (15) folgt

$$\pi > \frac{u_n - 4u_{2n}}{-3}, \text{ oder } \pi > u_{2n} + \frac{u_{2n} - u_n}{3};$$

dies ist aber genau die *Formel von Huygens* S. 32, (III).

2. *Beispiel.* $k = 2$, $\varphi(z) = (1 - 4z)(1 - 16z) = 1 - 20z + 64z^2$, $\varphi(1) = 45$.

Aus (15) ergibt sich wieder

$$\pi > \frac{u_n - 20u_{2n} + 64u_{4n}}{45},$$

oder

$$\pi > \frac{4u_{4n} - u_{2n}}{3} + \frac{\frac{4u_{4n} - u_{2n}}{3} - \frac{4u_{2n} - u_n}{3}}{15}. \tag{18}$$

In dieser Formel treten gerade die Brüche auf, die bei der Benützung der *Huygens*schen Formel (s. Beispiel 1) zu berechnen sind.

Aus (17) folgt

$$\varepsilon < \frac{\pi^7}{n^6 \cdot 7! \, 45},$$

$$\begin{array}{l} n = 3, \ \varepsilon < 0{,}000\,02 \\ n = 6, \ \varepsilon < 0{,}000\,000\,3 \\ n = 12, \ \varepsilon < 0{,}000\,000\,005. \end{array}$$

Der Wert von ε für $n = 12$ zeigt, daß durch lineare Kombination der Umfänge des regulären 12-Ecks, 24-Ecks und 48-Ecks die Zahl π mit 9 richtigen Ziffern erhalten werden kann.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse für $n = 3$ zusammengestellt.

n	u_n	$\frac{4u_{2n} - u_n}{3}$
3	2,598 076	3,133 975
6	3,000 000	3,141 102
12	3,105 828	

In der dritten Kolonne stehen die Näherungswerte für π, die man nach der *Huygens*schen Formel (III) S. 32 erhält. Nach (18) hat man jetzt zu 3,133975 den 15. Teil der Differenz 3,141102 — 3,133975 zu addieren und erhält so

$$\pi > 3{,}141582$$

mit einem Fehler $\varepsilon < 0{,}00002$, während $\pi = 3{,}141592\ldots$ ist. Man braucht also nur bis zum regulären 12-Eck zu gehen, um für π einen Näherungswert mit fünf sicheren Ziffern zu erhalten.

3. *Beispiel.* Würde man u_3, u_6 ... bis u_{96} benützen, so wäre $n = 3$, $k = 5$ zu setzen. Die Berechnung von ε aus (17) würde zeigen, daß man so π mit 18 richtigen Ziffern erhalten würde.

§ 7. Elementare Berechnung der zyklometrischen und trigonometrischen Funktionen[1])

Wie schon oben erwähnt wurde, läßt sich die Methode des § 4, die zur Berechnung der Zahl π diente, sehr wesentlich erweitern. Es gelingt so, die zyklometrischen und trigonometrischen Funktionen ohne jegliche Vorkenntnisse in der Trigonometrie zu berechnen. Es empfiehlt sich im Unterricht, ehe überhaupt von trigonometrischen Funktionen geredet wird, das Folgende vorzutragen.

Aufgabe. Von einem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 11) ADB sind die Zahlenwerte einer Kathete $AD = \varrho_1$ und der Hypotenuse $AB = r_1$ gegeben, der Winkel $BAD = \alpha$ soll in Graden, Minuten und Sekunden berechnet werden.

In der Figur ist $DC = BD$ gemacht; wir setzen $BC = s$, so daß also

$$\frac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \varrho_1^2} \tag{1}$$

ist. Wir versuchen die Länge s zu einem Kreisbogen (Fig. 12) UV umzubiegen, dessen zugehöriger Zentriwinkel geradeso groß ist wie der

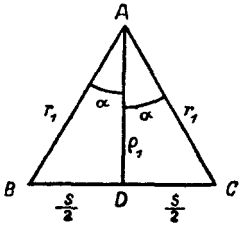

Fig. 11

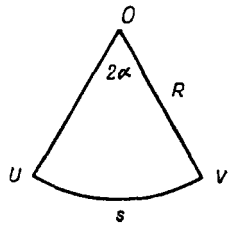

Fig. 12

Winkel $2\alpha = \sphericalangle BAC$. Gelingt es, den Radius R dieses Kreises zu berechnen, so läßt sich aus $UV = s$, $OV = R$ der Winkel α berechnen. Man

[1]) Vgl. meine S. 21 erwähnte Arbeit.

verlängere (Fig. 13) wie in § 4 AD über A hinaus um AB bis F, so ist $\sphericalangle BFC = \alpha$. Legt man nun an FC ein dem Dreieck FBC kongruentes Dreieck FCE an, so ist $\sphericalangle BFE$ wieder gleich 2α, und der gebrochene Zug BCE hat die Länge $2s$. Man verkleinere daher diese Figur im Maßstab 1:2, so daß die Figur $FB_1C_1E_1$ entsteht. Hier hat der

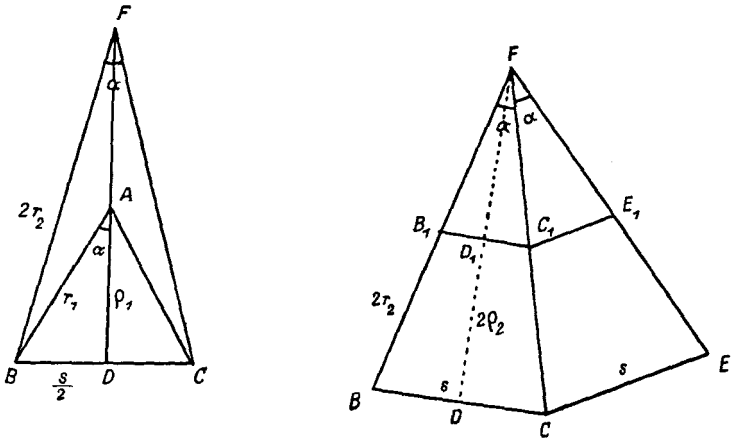

Fig. 13

gebrochene Zug $B_1C_1E_1$ die Länge s, und der Winkel B_1FE_1 ist gleich 2α. FB_1 heiße r_2 und die Höhe FD_1 des Dreiecks FB_1C_1 sei ϱ_2, dann hat man nach § 4, (2)

$$\boxed{\varrho_2 = \frac{r_1 + \varrho_1}{2}, \quad r_2 = \sqrt{r_1 \varrho_2}.} \tag{2}$$

Das Dreieck FB_1C_1, in dem $FB_1 = r_2$, $FD_1 = \varrho_2$ ist, wird nun geradeso behandelt wie soeben das Dreieck ABC der Fig. 11. Man verlängert die Höhe FD_1 über F um den Schenkel FB_1 bis J und erhält so das Dreieck JB_1C_1 mit dem Winkel $B_1JC_1 = \frac{2\alpha}{4}$ und der Basis $B_1C_1 = \frac{s}{2}$. Von diesem Dreieck legt man vier Exemplare nebeneinander, verkleinert wieder die Figur im Maßstab 1:2, und erhält so (Fig. 14) den gebrochenen Zug $B_2C_2E_2F_2G_2$ von der Länge s, wobei der Zentriwinkel B_2JG_2 wieder gleich 2α ist. Setzt man den Schenkel JB_2 des gleichschenkligen Dreiecks JB_2C_2 gleich r_4 und die Höhe

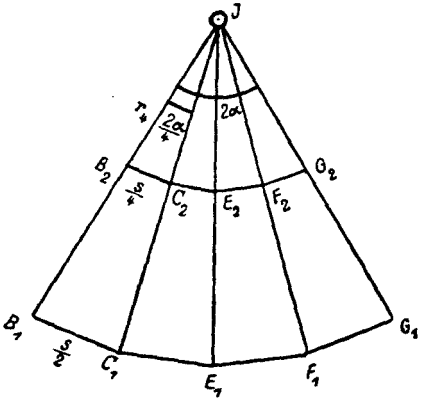

Fig. 14

zur Basis gleich ϱ_4, so hat man entsprechend zu (2)

$$\boxed{\varrho_4 = \frac{r_2 + \varrho_2}{2}, \quad r_4 = \sqrt{r_2 \varrho_4}\,.} \tag{3}$$

So fahre man fort: Nach den Ergebnissen in § 4 wird in der Grenze der gebrochene Linienzug zu einem Kreisbogen UV (Fig. 12) der Länge s, dessen Zentriwinkel 2α und dessen Radius R der gemeinsame Grenzwert der Zahlenfolgen $r_1, r_2, r_4 \ldots$ und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_4 \ldots$ ist, ganz entsprechend wie in § 4. Da weiter die Formeln (I) des § 4 rein arithmetisch aus den Formeln (2) und (3) des § 4 abgeleitet wurden, so gilt auch jetzt

$$\boxed{r_{2k} - \frac{r_k - r_{2k}}{3} < R < r_k - \frac{r_k - \varrho_k}{3}\,,} \tag{I}$$

und ebenso ist nach § 4, (22)

$$R^3 > \varrho_k r_k^2\,, \tag{4}$$

$$\boxed{\log R > \log r_k - \frac{1}{3}\,(\log r_k - \log \varrho_k)\,.} \tag{II}$$

Der Winkel α, den wir ja suchen, berechnet sich jetzt gemäß der Fig. 12 aus

$$2\alpha : 360^0 = s : 2\pi R$$

oder

$$\boxed{\alpha = \frac{180^0}{\pi R} \cdot \frac{s}{2}\,.} \tag{5}$$

Setzt man

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha \pi}{180^0}\,, \tag{6}$$

wo jetzt $\bar{\alpha}$ das analytische Maß des Winkels α ist, das sich hier wie überhaupt in der Analysis als das natürlichste Maß eines Winkels von selbst aufdrängt, so hat man

$$\boxed{\bar{\alpha} = \frac{\frac{s}{2}}{R}\,,} \tag{7}$$

wo $\frac{s}{2}$ aus (1) zu berechnen ist. *Der einfache Gang der Rechnung ist also der,* daß mittelst der Formeln (2) usw., (I) R, dann aus (1) $\frac{s}{2}$ berechnet wird, worauf man α aus (5) im Gradmaß oder aus (7) das analytische Maß $\bar{\alpha}$ von α erhält.

Man ist also imstande, ohne Trigonometrie aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Winkel zu berechnen.

Nachdem man (wie unten) ein paar Zahlenbeispiele gerechnet hat, wird man dem Schüler klarmachen, daß also zu jedem Zahlenwert des Verhältnisses $\frac{\varrho_1}{r_1}$ $(\varrho_1 \leqq r_1)$ ein ganz bestimmter Winkel gehört und umgekehrt: Der Winkel α ist eine Funktion des Verhältnisses $\frac{\varrho_1}{r_1}$, und $\frac{\varrho_1}{r_1}$

ist eine Funktion des Winkels α. Nun führt man die trigonometrischen Funktionen ein:

$$\cos\alpha = \frac{\varrho_1}{r_1}, \quad \sin\alpha = \frac{\frac{s}{2}}{r_1} \text{ usw.} \tag{8}$$

Die oben dargestellte Methode gestattet, die *zyklometrischen* Funktionen

$$\bar{\alpha} = \arccos\frac{\varrho_1}{r_1}, \quad \bar{\alpha} = \arcsin\frac{s}{2r_1} \text{ usw.}$$

zu berechnen. Im Unterricht wird man an dieser Stelle davon gar nicht reden, sondern sagen: Nimmt man für $\frac{\varrho_1}{r_1}$ ($\varrho_1 < r_1$) beliebige Zahlenwerte, berechnet nach der Methode jeweils den zugehörigen Winkel α und trägt alles in eine Tabelle ein, so kann man eben aus dieser Tabelle umgekehrt auch für jeden Winkel α die Zahl $\frac{\varrho_1}{r_1}$, d. h. nach (8) den Kosinus von α entnehmen. So ist dann das, was im Anfang von § 1 gefordert worden ist, erfüllt.

Noch möge bemerkt werden, daß man nicht bloß für den Winkel α den Kosinus und ebenso die anderen trigonometrischen Funktionen kennt, sondern auch für den Winkel $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{8}$ usw. Denn nach den gegebenen Ausführungen ist doch

$$\cos\alpha = \frac{\varrho_1}{r_1}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_2}{r_2}, \quad \cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\varrho_4}{r_4}, \quad \cos\frac{\alpha}{8} = \frac{\varrho_8}{r_8}, \ldots \tag{9}$$

Durch die Rechnung hat man also ganz von selbst zu einem ganzen Satz von Winkeln die Werte der trigonometrischen Funktionen erhalten. Ehe wir ein Beispiel geben, noch eine Bemerkung:

Ich halte es nicht für *logisch*, dem Schüler Näherungswerte der trigonometrischen Funktionen durch *Abmessen* von Strecken im Einheitskreis zu geben; denn ein kluger Schüler wird sich sagen, daß es doch viel einfacher ist, statt durch *Rechnen* mit Hilfe der durch *Messen* gefundenen trigonometrischen Funktionen Stücke aus einer Figur zu bestimmen, aus der Figur selbst ebenfalls durch *Messen* die Stücke zu entnehmen. Der Witz der ganzen Sache liegt doch darin, daß mit Hilfe der durch ein *Rechenverfahren* gewonnenen Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen nun aus jeder Figur die Stücke *berechnet* (im Gegensatz zum Messen) werden können. Andernfalls kommt man aus den graphischen Methoden nicht heraus.

Beispiel. Gegeben sei $\cos\alpha = 0{,}75470$. *Es soll der Winkel* α *berechnet werden.* Man setze in (2)

$$\varrho_1 = 0{,}75470, \qquad r_1 = 1$$

und erhält dann nach (2), (3) usw. folgende Tabelle

$$\begin{array}{llll} r_1 = 1{,}00000 & \varrho_1 = 0{,}75470 & \log r_1 = 0{,}00000 & \log\varrho_1 = 9{,}87777 \\ r_2 = 0{,}93668 & \varrho_2 = 0{,}87735 & \log r_2 = 9{,}97159 & \log\varrho_2 = 9{,}94317_5 \\ r_4 = 0{,}92173 & \varrho_4 = 0{,}90701_5 & \log r_4 = 9{,}96460_5 & \log\varrho_4 = 9{,}95762 \end{array}.$$

Mittels (I) und (II) findet man mit $k = 4$

$$R < 0{,}91682, \qquad R > 0{,}91680 \tag{10}$$

ein Beweis dafür, wie ausgezeichnet die Formeln (I) und (II) die Konvergenz beschleunigt haben: man bedenke, daß r_4 und ϱ_4 schon in der zweiten Dezimalstelle sich unterscheiden! Für $\log \frac{s}{2}$ ergibt sich nach (1)

$$\log \frac{s}{2} = 9{,}81695\,. \tag{11}$$

Aus (5) erhält man entsprechend den beiden Näherungswerten von R in (10)

$$\alpha > 41^0\,0'\,3'', \qquad \alpha < 41^0\,0'\,7'',$$

also im Mittel

$$\alpha = 41^0\,0'\,5''. \tag{12}$$

Die fünfstellige Logarithmentafel liefert für

$$\log \cos (41^0\,0'\,5'') \text{ den Wert } 9{,}87777$$

d. h. genau den Wert von $\log \frac{\varrho_1}{r_1} = \log \varrho_1$. ($r_1 = 1$) in der obigen Tabelle. Entsprechend (9) hat man weiter

$$\log \cos (20^0\,30'\,2'') = \log \varrho_2 - \log r_2 = 9{,}97158$$
$$\log \cos (10^0\,15'\,1'') = \log \varrho_4 - \log r_4 = 9{,}99301$$

genau dieselben Werte, wie sie die fünfstellige Tafel gibt. Wollte man mit Hilfe der Cosinus-Reihe $\cos (41^0\,0'\,5'')$ berechnen, so wäre die Rechnung viel länger und unangenehmer als die obige.

Bemerkung 1. Nimmt man $r_1 = 1$, $\varrho_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so weiß man, daß $\alpha = 60^0$ ist. Berechnet man R, so ergibt sich aus (5) der Wert von π. Man ist so auf die Aufgabe von § 4 zurückgeführt.

Bemerkung 2. Fällt man in der ersten Figur 13 von A auf BF das Lot, so erhält man aus dem entstehenden rechtwinkligen Dreieck, und entsprechend weiter

$$\frac{r_2}{r_1} = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{r_4}{r_2} = \cos\frac{\alpha}{4}, \quad \frac{r_8}{r_4} = \cos\frac{\alpha}{8}, \quad \ldots, \quad \frac{r_2^k}{r_2^{k-1}} = \cos\frac{\alpha}{2^k}.$$

Multipliziert man hier die linken und die rechten Seiten, so folgt

$$\frac{r_2^k}{r_1} = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \ldots \cos\frac{\alpha}{2^k}. \tag{13}$$

Läßt man k unaufhörlich wachsen, dann konvergiert die linke Seite von (13) nach $\frac{R}{r_1}$; daraus folgt, daß auch die rechte Seite konvergieren muß, und zwar nach demselben Grenzwert. Man hat so die *konvergente Produktdarstellung:*

$$\frac{R}{r_1} = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \ldots \tag{14}$$

Entnimmt man aus (7) den Wert für $R = s : 2\bar{a}$, so folgt aus (14)

$$\frac{s}{2r_1\bar{a}} = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \ldots$$

Da nun $s:2r_1 = \sin\alpha$ ist, so ergibt sich, wenn der Strich auf α weggelassen wird,

$$\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}\ldots}, \tag{15}$$

wo also von nun an α in analytischem Maß zu messen ist. *Dies ist die bekannte Formel von Euler.*

Bemerkung 4. Setzt man in den Formeln (I) $k = 1$, so folgt

$$\frac{4r_2 - r_1}{3} < R < \frac{2r_1 + \varrho_1}{3}$$

oder, da nach (7) $R = \frac{s}{2a}$ ist,

$$\frac{4r_2 - r_1}{3} < \frac{s}{2a} < \frac{2r_1 + \varrho_1}{3}.$$

Nun ist aber nach der Figur 13

$$r_2 = \frac{s}{4\sin\frac{\alpha}{2}},\quad r_1 = \frac{s}{2\sin\alpha},\quad \varrho_1 = \frac{s}{2}\operatorname{ctg}\alpha, \tag{16}$$

also

$$\frac{2\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{6\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{2+\cos\alpha}{6\sin\alpha},$$

und jetzt

$$\boxed{\alpha < \frac{3\sin\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2} - 1},\quad \alpha > \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}.} \tag{III}$$

Hieraus folgt sofort

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1. \tag{17}$$

Die zweite Ungleichung (III) steht in Beziehung zu der am Schluß von § 5 gegebenen (angenäherten) Rektifikation eines Kreisbogens. Wir sind jetzt in der Lage, den *begangenen Fehler f abzuschätzen.* Wir setzen daher

$$\alpha = \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} + f, \tag{18}$$

dann ist f sicher kleiner als die Differenz der oberen und unteren Schranke in (III):

$$f < \frac{3\sin\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2} - 1} - \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} = \frac{3\sin\alpha\left(3+\cos\alpha - 4\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{(2+\cos\alpha)\left(4\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right)}.$$

Nun ist

$$3 + \cos\alpha - 4\cos\frac{\alpha}{2} = 2 + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 4\cos\frac{\alpha}{2} = 2\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 8\sin^4\frac{\alpha}{4}$$

also

$$f < \frac{24\sin\alpha\sin^4\frac{\alpha}{4}}{(2+\cos\alpha)\left(4\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right)}. \tag{19}$$

Ist $\frac{\alpha}{2}$ im Gradmaß $= 30^0$, so ist $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} > \frac{3}{4}$. Nimmt man also $\frac{\alpha}{2} \leqq 30^0$, d. h. $\alpha \leqq 60^0$, so ist $\cos\frac{\alpha}{2}$ stets $> \frac{3}{4}$, der Nenner also in (19) sicher größer als 4; darum ist dann

$$f < 6 \sin\alpha \sin^4\frac{\alpha}{4}$$

Nun ist nach (III) der Sinus ($\alpha > 0$) kleiner als der Bogen, also ist

$$f < \frac{3\alpha^5}{128}, \text{ für alle } \alpha \leqq 60^0. \tag{20}$$

Wie gut die mit den ganz elementaren Mitteln geleistete Abschätzung von f ist, geht daraus hervor, daß, wenn man aus (18) f als Funktion von α entnimmt und nach Potenzen von α entwickelt, man für f erhält[1])

$$f = \frac{\alpha^5}{180} + \frac{\alpha^7}{1512} + \ldots$$

Beispiel. $\alpha = \frac{1}{2}$ (α in Gradmaß $\sim 28^0\,30'$), so wird nach (20)

$$f < \frac{3}{128.32},$$

also wenn der zu rektifizierende Kreisbogen den Radius 32 cm besitzt, $f < \frac{1}{40}$ cm $= \frac{1}{4}$ mm; die Näherungskonstruktion ist also für praktische Zwecke mehr als hinreichend.

Bemerkung 5. Setzt man in (4) $k = 1$, so folgt

$$R > \sqrt[3]{r_1^2 \varrho_1}$$

und, da nach (7) $R = \frac{s}{2\alpha}$ und nach (16) $r_1 = \frac{s}{2\sin\alpha}$, $\varrho_1 = \frac{s}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ ist,

$$\sin\alpha > \alpha\sqrt[3]{\cos\alpha},$$

$$\log\sin\alpha > \log\alpha + \frac{1}{3}\log\cos\alpha. \tag{21}$$

Würde man statt $>$ das Zeichen $=$ setzen, was für kleine Winkel erlaubt ist, so hätte man die bekannte *Maskelynesche Regel*[2]). Auch wäre es, wie oben, nicht schwer den Fehler abzuschätzen.

§ 8. Untersuchungen aus dem Nachlaß von Gauß

In den Paragraphen 4 und 7 haben wir einen interessanten Algorithmus kennengelernt, der ausgehend von den Größen r_1, ϱ_1 ($r_1 > \varrho_1$) mittels der Formeln

$$\varrho_{2k} = \frac{r_k + \varrho_k}{2}, \quad r_{2k} = \sqrt{r_k \varrho_{2k}} \tag{1}$$

[1]) Vgl. z. B. *E. Hammer*, „Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie", 4. Aufl. 1916, S. 182.

[2]) Vgl. *E. Hammer* a. a. O. S. 175.

zwei konvergente Zahlenfolgen ϱ_k, r_k berechnen ließ mit demselben Grenzwert R; dabei war nach § 7, (7)

$$R = \frac{\sqrt{r_1^2 - \varrho_1^2}}{\arccos \frac{\varrho_1}{r_1}}, \tag{2}$$

da ja nach § 7, (1)

$$\frac{s}{2} = \sqrt{r_1^2 - \varrho_1^2},$$

und nach § 7, (8)

$$\cos \alpha = \frac{\varrho_1}{r_1}$$

war.

Wir wollen nun jetzt diesen Algorithmus und nachher verwandte andere rein arithmetisch, also losgelöst von seinem geometrischen Ursprung behandeln, und wollen darum die Bezeichnung ändern.

Wir gehen also von zwei gegebenen positiven Zahlen a, b aus und berechnen dann a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; ... durch folgende Kette von Gleichungen

$$\begin{aligned} &a_1 = \frac{a+b}{2};\ a_2 = \frac{a_1+b_1}{2};\ a_3 = \frac{a_2+b_2}{2};\ \ldots\ a_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}; \\ &b_1 = \sqrt{a_1 b};\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1};\ b_3 = \sqrt{a_3 b_2};\ \ldots\ b_k = \sqrt{a_k b_{k-1}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für den Fall $a < b$, den wir in § 4 und 7 behandelt haben, wissen wir dann, daß die Reihen a_i, b_i einem gemeinsamen Grenzwert zustreben, den wir jetzt A nennen. Man hat dann nach (2)

$$A = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}. \tag{4}$$

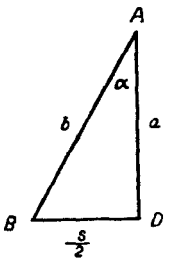

Fig. 15

Der Algorithmus (3) und die Formel für den Grenzwert A, und zwar für den Fall $a < b$ und den unten zu behandelnden $a > b$ (vgl. S. 46), findet sich in einem Brief von *Pfaff* an *Gauß*[1]) (8. Dez. 1800).

Wie schon angekündigt wollen wir jetzt die Formel (4) *rein arithmetisch beweisen*[2]).

Das Dreieck ABD in der ersten Figur 13 besitzt jetzt nach der neuen Bezeichnung die Stücke, die in Fig. 15 eingezeichnet sind, und man hat

$$a = \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \alpha,\quad b = \frac{s}{2 \sin \alpha};$$

mit diesen Stücken verwende man den Algorithmus (3) und erhält

$$a_1 = \frac{s}{2^2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},\quad b_1 = \frac{s}{2^2 \sin \frac{\alpha}{2}}, \tag{5}$$

[1]) *C. F. Gauß*, Gesammelte Werke, Bd. X_1, S. 234.

[2]) Für das Folgende vgl. auch *E. Beke*, Zeitschr. f. math. natwiss. Unterr., 58. Jahrg., 1927, S. 325.

$$a_2 = \frac{s}{2^3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^2}, \qquad b_2 = \frac{s}{2^3 \sin\frac{\alpha}{2^2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{6}$$

$$a_k = \frac{s}{2^{k+1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^k}, \; b_k = \frac{s}{2^{k+1}\sin\frac{\alpha}{2^k}}.$$

Es ist also

$$b_k = \frac{s}{2\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2^k}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}; \tag{7}$$

läßt man k unaufhörlich wachsen, so ist wegen

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

(vgl. § 7, (17)) nach (7) und (6)

$$A = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \frac{s}{2\alpha}. \tag{8}$$

Nach der Figur 15 ist aber

$$\frac{s}{2} = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad \alpha = \arccos\frac{a}{b},$$

also nach (11)

$$A = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos\frac{a}{b}}. \tag{9}$$

Das ist aber die Formel (4).

Es *entsteht nun die Frage,* ob auch *im Falle* $a > b$ die Zahlenfolgen a_i, b_i konvergent sind und einem gemeinsamen Grenzwert A zustreben, und welche Funktion von a und b dieser Grenzwert A ist. Darüber besitzen wir aus dem Nachlaß von *Gauß*[1]) folgende interessante Untersuchung.

Man bestimme zwei positive Größen u und t so, daß

$$a = \frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot u, \quad b = \frac{2t}{t^2-1}\cdot u \tag{10}$$

wird. Durch Division erhält man für t eine quadratische Gleichung und aus ihr den Wert für t

$$t = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}; \tag{11}$$

trägt man diesen Wert in die zweite Gleichung (10) ein, so folgt für u

$$u = +\sqrt{a^2 - b^2}. \tag{12}$$

Die Wurzel wurde positiv ausgezogen, damit u positiv wird. Wendet

[1]) Vgl. *C. F. Gauß*, Gesammelte Werke X_1, S. 236—237, dazu auch *C. W. Borchardt*, Werke 1888, S. 119, S. 329 und S. 455.

man auf die Größen a und b in (10) den Algorithmus (3) an, so folgt

$$a_1 = \frac{t+1}{t-1}\cdot\frac{u}{2}, \quad b_1 = \frac{2\sqrt{t}}{t-1}\cdot\frac{u}{2}. \tag{13}$$

Die positiven Zahlen a_1 und b_1 lassen sich auf dieselbe Form wie a und b in (10) bringen, wenn man $\sqrt{t} = t_1$ und $\frac{u}{2} = u_1$ setzt. Man hat also

$$\begin{aligned}
&a_1 = \frac{t_1^2+1}{t_1^2-1}\cdot u_1, \quad b_1 = \frac{2t_1}{t_1^2-1}\cdot u_1; \quad t_1 = \sqrt{t}, \quad u_1 = \frac{u}{2};\\
&a_2 = \frac{t_2^2+1}{t_2^2-1}\cdot u_2, \quad b_2 = \frac{2t_2}{t_2^2-1}\cdot u_2; \quad t_2 = \sqrt{t_1}; \quad u_2 = \frac{u_1}{2};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_n = \frac{t_n^2+1}{t_n^2-1}\cdot u_n, \quad b_n = \frac{2t_n}{t_n^2-1}\cdot u_n; \quad t_n = \sqrt{t_{n-1}}, \quad u_n = \frac{u_{n-1}}{2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Hieraus folgt

$$a_n = \frac{t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}+1}{t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}-1}\cdot\frac{u}{2^n}, \quad b_n = \frac{t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}{t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}-1}\cdot\frac{u}{2^{n-1}}. \tag{15}$$

Setzt man

$$1+\frac{1}{N} = t^{\frac{1}{n}}, \tag{16}$$

so ist, da $t > 1$ ist, $N > 0$, und mit n wächst auch N; strebt n gegen $+\infty$, so tut dies auch N. Aus (16) folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} = t^{\frac{1}{n}} - 1, \quad \frac{1}{n}\lg t = \lg\left(1+\frac{1}{N}\right), \quad n = \frac{\lg t}{\lg\left(1+\frac{1}{N}\right)},\\
&n\left(t^{\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{\lg t}{\lg\left(1+\frac{1}{N}\right)^N},
\end{aligned} \tag{17}$$

wo $\log t$ usw. den *natürlichen* Logarithmus bedeutet.

Da nun

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = e, \text{ also } \lim_{N\to\infty}\lg\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = \lg e = 1$$

ist, so strebt in (17) mit wachsendem N die rechte Seite von (17) dem Grenzwert $\lg t$ zu, also strebt die linke Seite von (17), wenn n unaufhörlich wächst, demselben Grenzwert zu. Man hat also die bekannte Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} n\left(t^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lg t. \tag{18}$$

In (15) lassen wir nun n unaufhörlich wachsen: Da nun nach (18)

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}-1\right) = \lg t$$

und nach § 1, (10)

$$\lim_{n\to\infty} t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1$$

ist, so ergibt sich aus (15)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A = \frac{u}{\lg t},$$

wo der gemeinsame Grenzwert wieder mit A bezeichnet wird. Aus (11) und (12) folgt jetzt

$$A = \frac{+\sqrt{a^2-b^2}}{\lg\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)}. \tag{19}$$

Also auch für $a > b$ sind die Zahlenfolgen a_n, b_n in (3) konvergent und streben demselben Grenzwert A zu, der durch (19) definiert ist. Vergleicht man die Formeln (9) und (19), so erhält man formell

$$\arccos\frac{a}{b} = i\lg\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right). \tag{20}$$

Dies ist aber eine aus der Analysis bekannte Beziehung zwischen arc cos und lg, die wir noch verifizieren wollen. Setzt man statt $\frac{a}{b}$ die Größe φ, so wollen wir zeigen, daß entsprechend (20)

$$\varphi = \cos\left[i\lg\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right)\right] \tag{21}$$

ist. Geht man in der Tat von der bekannten Formel

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

aus, so folgt

$$\cos\left[i\lg\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right)\right] = \frac{e^{-\lg\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right)}+e^{\lg\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}}+\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right)}{2} = \frac{1+\varphi^2+2\varphi\sqrt{\varphi^2-1}+\varphi^2-1}{2\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right)}$$

$$= \frac{2\varphi\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right)}{2\left(\varphi-\sqrt{\varphi^2-1}\right)} = \varphi,$$

womit die Richtigkeit von (21) und (20) bestätigt ist. Es ist interessant, zu sehen, wie sich bei unseren elementaren Betrachtungen schon funktionentheoretische Zusammenhänge kund tun[1]).

Setzt man für den Algorithmus (3) im besonderen

$$a = 1+\sigma^2, \qquad b = 2\sigma, \tag{22}$$

wo $\sigma > 1$ ist, so ist $a-b = (1-\sigma)^2 > 0$ also $a > b$. Aus (19) folgt dann

$$\lg\sigma = \frac{\sigma^2-1}{A}. \tag{23}$$

[1]) Vgl. hierzu auch *W. F. Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie, 1. Bd., 5. Aufl., 1928, S. 270.

Aus dieser Formel kann der natürliche Logarithmus jeder Zahl $\sigma > 1$ mit Hilfe des Algorithmus (3) leicht berechnet werden. Es ist bemerkenswert, daß *man durch dieselbe Methode die Werte der Zahl π, der trigonometrischen Funktionen und der natürlichen Logarithmen berechnen kann.*

Bemerkung. Will man nach dieser Methode die natürlichen Logarithmen und damit auch die gemeinen Logarithmen berechnen, so wird man die Berechnung der Größe $\sqrt{a_1 b}$ und der entsprechenden Wurzeln in (3) nach der Formel (vgl. S. 12)

$$\sqrt{a_1 b} = \sqrt{\left(\frac{a_1 + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - b}{2}\right)^2} \tag{24}$$

ausführen, was mit Hilfe der Quadratzahlentabelle leicht geschehen kann. Sehr bald in der Rechnung kann dann das zweite Glied unter der Wurzel vernachlässigt werden,

Beispiel. Es soll lg 10 berechnet werden.

Es ist σ in (23) gleich 10 und daher nach (22)

$$a = 101, \qquad b = 20.$$

Wendet man nun (3) an, so erhält man folgende Zahlen:

$a = 101{,}000$	$b = 20{,}000$
$a_1 = 60{,}500$	$b_1 = 34{,}785$
$a_2 = 47{,}642$	$b_2 = 40{,}709$
$a_3 = 44{,}175$	$b_3 = 42{,}407$
$a_4 = 43{,}291$	$b_4 = 42{,}847$
$a_5 = 43{,}069$	$b_5 = 42{,}958$
$a_6 = 43{,}013$	$b_6 = 42{,}985$
$a_7 = 42{,}999$	$b_7 = 42{,}992$
$a_8 = 42{,}995$	$b_8 = 42{,}993$
$a_9 = 42{,}994$	$b_9 = 42{,}994$

Dabei wurden die Wurzeln in (3) nach (24) berechnet. Die Rechnung selbst zeigt, daß schon bei der Berechnung von $b_5 = \sqrt{a_5 b_4}$ das zweite Glied unter der Wurzel in (24) bei der verwendeten Ziffernzahl nicht mehr in Frage kommt, daß also $\sqrt{a_5 b_4}$ durch $\frac{a_5 + b_4}{2}$ ersetzt werden kann. Man kommt also von da an mit dem arithmetischen Mittel aus. Nach der Tabelle hat man für A den Näherungswert A = 42,994. Nach (23) hat man jetzt

$$\lg 10 = \frac{99}{42{,}994} = 2{,}3027\,,$$

während die Tafel 2,3026 gibt. Dividiert man die natürlichen Logarithmen mit lg 10, so erhält man die gemeinen.

§ 9. Nachlaß von Gauß über das arithmetisch-geometrische Mittel

Verwandt mit dem bisher untersuchten Algorithmus ist der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels, der schon *Lagrange* (vgl. Oeuvres 1, S. 272, 304ff.) bekannt war. Unabhängig von ihm hat sich *Gauß* schon 1791, also im Alter von 14 Jahren damit beschäftigt. Sein Nachlaß[1]) enthält wichtige Untersuchungen über diesen Gegenstand, die zeigen, „daß *Gauß* im Alter von 23 Jahren im Besitze aller, auch der tiefstliegenden Resultate der Theorie der Modulfunktion war, die das folgende Jahrhundert erst in harter, zäher Arbeit wiedererringen mußte[2])".

Wir folgen in diesem Paragraphen fast wörtlich *Gauß*. Es seien a und b zwei positive reelle Größen und $a \geqq b$. Wir bilden aus ihnen die beiden Folgen:

$$\begin{matrix} a\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots \\ b\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots \end{matrix} \tag{1}$$

in der Weise, daß irgend zwei entsprechende Glieder die Mittelwerte zwischen den beiden vorangehenden sind, und zwar sollen die Glieder der oberen Folge die arithmetischen, die der unteren die geometrischen Mittel sein, d. h.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(a+b), & b_1 &= \sqrt{a\,b}, \\ a_2 &= \frac{1}{2}(a_1+b_1), & b_2 &= \sqrt{a_1 b_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \\ a_\nu &= \frac{1}{2}(a_{\nu-1}+b_{\nu-1}), & b_\nu &= \sqrt{a_{\nu-1} b_{\nu-1}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir setzen voraus, daß in (2) die Quadratwurzeln sämtlich mit positivem Zeichen genommen werden; dann lassen sich die Folgen beliebig weit fortsetzen, alle ihre Glieder sind vollkommen bestimmt und haben positiv reelle Werte. Ferner sieht man sofort folgendes:

1. Wenn $a = b$ ist, sind alle Glieder beider Folgen $= a = b$.
2. Ist aber $a \neq b$, so folgt aus

$$(a_1 - b_1)\,(a_1 + b_1) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \tag{3}$$

die Ungleichung $$b_1 < a_1$$

und ebenso $$b_2 < a_2\,, \quad b_3 < a_3\,.$$

(Geom. Mittel $\leqq$ arithm. Mittel!)

---

[1]) Vgl. „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften", Nr. 225, ed. H. Geppert 1927, S. 27 (Bestimmung der Anziehung eines ellipt. Ringes usw. v. *C. F. Gauß*).

[2]) Vgl. *Geppert* a. a. O. S. 188.

3. Es ist

$$a_1 < a\,, \qquad b_1 > b$$

$$a_2 < a_1\,, \qquad b_2 > b_1\,,$$

d. h. die linke Folge in (2) nimmt beständig ab, die rechte beständig zu: Daraus erhellt, daß die beiden Folgen einen Grenzwert α und β haben, der zwischen a und b liegt.

4. Aus der Beziehung (3)

$$\frac{a_1 - b_1}{a - b} = \frac{a-b}{4\,(a_1 + b_1)} = \frac{a-b}{2\,(a+b) + 4\,b_1} < \frac{1}{2}$$

folgt

$$a_1 - b_1 < \frac{1}{2}\,(a-b)\,.$$

Ebenso wird

$$a_2 - b_2 < \frac{1}{2}\,(a_1 - b_1) < \frac{1}{4}\,(a-b)\,.$$

$$a_\nu - b_\nu \qquad\qquad < \frac{1}{2^\nu}\,(a-b)\,, \tag{4}$$

d. h. die Größen $a - b$, $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, bilden eine beständig abnehmende Folge mit dem Grenzwert 0. Also ist

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n = \beta = \lim_{n \to \infty} b_n\,,$$

d. h. die obere und untere Folge (1) haben den gleichen Grenzwert, und dieser ist kleiner als alle Größen der ersten Folge, aber größer als alle Glieder der zweiten.

Diesen Grenzwert bezeichnen wir als das *arithmetisch-geometrische Mittel* (agM) zwischen a und b und schreiben dafür $M\,(a, b)$. Soweit *Gauß*. Man hat offenbar die Beziehungen

$$M\,(a, b) = M\,(a_n, b_n)\,, \tag{5}$$

$$M\,(na, nb) = nM\,(a, b)\,, \qquad n > 0 \tag{6}$$

$$M\,(a, b) = a\,M\left(1, \frac{b}{a}\right) = b\,M\left(\frac{a}{b}\,, 1\right) = M\,(b, a)\,. \tag{7}$$

Aus (4) schon geht hervor, daß der Algorithmus rasch konvergiert. Über die Konvergenz sagt *Geppert*, a. a. O. S. 198, Anm. 3. (12): Nimmt man $a = 1$, b gleich einem echten Dezimalbruch, was nach (7) stets möglich ist, so stimmen a_n und b_n in den ersten $2^n - 1$-Stellen hinter dem Komma überein, und diese Ziffern bleiben in allen folgenden a_{n+k}, b_{n+k}, also auch in $M\,(a, b)$ erhalten. Dieses Verhalten tritt immer ein, wenn n genügend groß ist.

§ 10. Berechnung der reellen Periode des elliptischen Integrals 1. Gattung durch das *agM* nach Gauß

Gauß hat in seiner Arbeit „Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes" (*Geppert*, a. a. O. S. 23) einen wunderbaren Zusammenhang zwischen der reellen Periode des elliptischen Integrals erster Gattung und dem arithmetisch-geometrischen Mittel entdeckt, so daß dadurch eine sehr bequeme Berechnung dieser Periode ermöglicht wird. Wir führen dies im Anschluß an *Gauß* aus, um den engen Zusammenhang ganz elementarer Methoden mit schon ziemlich tiefliegenden Ergebnissen der höheren Mathematik an diesem klassischen Beispiel aufzuzeigen.

Wir wollen zeigen, daß man hat

$$\boxed{\frac{1}{M(a,b)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}} \tag{1}$$

Beweis. Man setze

$$\sin\varphi = \frac{2a\sin\varphi'}{(a+b)\cos^2\varphi' + 2a\sin^2\varphi'}, \tag{2}$$

welche Substitution die *Landen*sche Transformation heißt. Wir zeigen nun, daß vermöge (2)

$$+\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = +\frac{d\varphi'}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi' + b_1^2\sin^2\varphi'}} \tag{3}$$

wird. Setzt man

$$N = (a+b)\cos^2\varphi' + 2a\sin^2\varphi', \tag{4}$$

so hat man

$$\sin^2\varphi = \frac{4a^2\sin^2\varphi'}{N^2}, \tag{5}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{(a+b)^2\cos^4\varphi' + 4a(a+b)\cos^2\varphi'\sin^2\varphi' + 4a^2\sin^4\varphi' - 4a^2\sin^2\varphi'}{N^2},$$

$$\cos^2\varphi = \frac{(a+b)^2\cos^4\varphi' + 4ab\cos^2\varphi'\sin^2\varphi'}{N^2}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) entnimmt man:

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = \frac{a^2(a+b)^2\cos^4\varphi' + 4a^2b\cos^2\varphi'\sin^2\varphi' + 4a^2b^2\sin^2\varphi'}{N^2},$$

$$= a^2\cdot\frac{(a+b)^2\cos^4\varphi' + 4ab\cos^2\varphi'\sin^2\varphi' + 4b^2\sin^2\varphi'(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi')}{N^2},$$

$$= a^2\cdot\frac{(a+b)^2\cos^4\varphi' + 4b(a+b)\cos^2\varphi'\sin^2\varphi' + 4b^2\sin^4\varphi'}{N^2},$$

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = \left\{a\cdot\frac{(a+b)\cos^2\varphi' + 2b\sin^2\varphi'}{N}\right\}^2. \tag{7}$$

Aus (2) folgt weiter:

$$\cos\varphi\, d\varphi = d\varphi' \cdot \frac{2a\cos\varphi'\left\{(a+b)\cos^2\varphi' + 2a\sin^2\varphi'\right\} - 2a\sin\varphi'\left\{-2(a+b)+4a\right\}\cos\varphi'\sin\varphi'}{N^2},$$

$$= d\varphi' \cdot \frac{2a(a+b)\cos^2\varphi' + 4a^2\cos\varphi'\sin^2\varphi' - 4a(a-b)\cos\varphi'\sin^2\varphi'}{N^2},$$

$$\cos\varphi\, d\varphi = 2a \cdot \frac{(a+b)\cos^2\varphi' + 2b\sin^2\varphi'}{N^2}\cos\varphi'\, d\varphi'. \tag{8}$$

Aus (8) und (2) folgt, daß wenn φ' stetig von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, auch φ stetig von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunimmt, da dann $d\varphi$ in (8) stets positiv ist. Aus (7) folgt:

$$+\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = a \cdot \frac{(a+b)\cos^2\varphi' + 2b\sin^2\varphi'}{N}. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) ergibt sich

$$\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{+\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{2\cos\varphi'\, d\varphi'}{N} \tag{10}$$

und aus (6)

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\varphi' + (\sqrt{ab})^2\sin^2\varphi'}}{N}\cos\varphi', \tag{11}$$

wo für die Wurzel das positive Zeichen zu nehmen ist.

Aus (10) und (11) erhält man durch Division und nach § 9, (12)

$$\frac{d\varphi}{+\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\varphi'}{+\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi' + b_1^2\sin^2\varphi'}}. \tag{12}$$

Es ist also auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{+\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{+\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{+\sqrt{a_n^2\cos^2\varphi + b_n^2\sin^2\varphi}}. \tag{13}$$

Das letzte Integral, das wir mit K_1 bezeichnen, unterscheidet sich aber von dem Integral

$$K_1' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{+\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}} \tag{14}$$

um beliebig wenig, wenn nur n genügend groß ist ($a = \lim a_n = \lim b_n$). Denn es ist

$$K_1 - K_1' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} - \sqrt{a_n^2\cos^2\varphi + b_n^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\quad\sqrt{a_n^2\cos^2\varphi + b_n^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 - a_n^2)\cos^2\varphi + (a^2 - b_n^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\sqrt{a_n^2\cos^2\varphi + b_n^2\sin^2\varphi}\left\{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} + \sqrt{a_n^2\cos^2\varphi + b_n^2\sin^2\varphi}\right\}}\, d\varphi.$$

Ist nun g der kleinste Wert, den der Nenner des Integranden im Integrationsintervall annimmt, so ist

$$|K_1 - K_1'| < \left|\left(\frac{a^2 - a_n^2}{g}\right)\right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \left|\frac{a^2 - b_n^2}{g}\right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi ,$$

$$|K_1 - K_1'| < \frac{\pi}{2g}\left\{\left|a^2 - a_n^2\right| + \left|a^2 - b_n^2\right|\right\}.$$

Daraus folgt aber für $n \to \infty$

$$K_1 = K_1' .$$

Aus (14) folgt nun

$$K_1' = \frac{\pi}{2a} .$$

Man hat also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{+\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2a} ,$$

oder

$$\frac{1}{M(a,b)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{+\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} , \tag{15}$$

w. z. b. w. siehe (1).

Überführung in die Legendresche Normalform.

Es ist

$$a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi = a^2(1 - \sin^2\varphi) + b^2 \sin^2\varphi = a^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2\varphi\right).$$

Man setzt nun

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} < 1 , \quad (a > b) ,$$

woraus folgt

$$b = a\sqrt{1 - k^2} .$$

Aus (14) ergibt sich

$$\frac{1}{M(a, a\sqrt{1-k^2})} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

und hieraus nach § 9, (6)

$$\boxed{K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-k^2})} .} \tag{16}$$

Die ganzen vielfachen von K sind die reellen Perioden der elliptischen Funktionen Jacobis. Aus der Gaußschen Formel (16) kann man nun K

sehr einfach und scharf berechnen, und zwar ist diese Art der Berechnung von K wesentlich bequemer als mit Hilfe der bekannten Reihenentwicklung, die zudem, wenn k nahe an 1 liegt, sehr schlecht konvergiert.

§ 11. Berechnung des unbestimmten elliptischen Integrals 1. Gattung durch das agM nach Gauß[1])

Mittels der *Landen*schen Transformation (§ 10, (12)) ist es nun nicht schwer, auch das elliptische Integral erster Gattung mit beliebiger oberer Grenze zu berechnen. Es sei also

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} \tag{1}$$

zu berechnen, wo $\varphi < \frac{\pi}{2}$ sei. Es folgt nun aus § 10, (2) und (13), daß bei fortgesetzter Anwendung der *Landen*schen Transformation

$$\sin\varphi_{\nu-1} = \frac{2a\sin\varphi_\nu}{(a+b)\cos^2\varphi_\nu + 2a\sin^2\varphi_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3\ldots;\ \varphi_0 = \varphi) \tag{2}$$

die Beziehung besteht

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi_\nu} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_\nu^2\cos^2\varphi + b_\nu^2\sin^2\varphi}}. \quad (\nu = 1, 2, 3\ldots) \tag{3}$$

Kann man nun zeigen, daß in (2) φ_ν mit wachsendem ν einem Grenzwert φ_ω zustrebt, so folgt ähnlich wie in § 10 aus (3), wenn $\nu \to \infty$ strebt,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\varphi_\omega}{M(a,b)}. \tag{4}$$

Da aber die Berechnung von φ_ω aus (2) unbequem ist, verwendet *Gauß* eine andere Methode, die die Rechnung wesentlich erleichtert.

Zur Berechnung des Integrals

$$J = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} \qquad \left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right) \tag{5}$$

werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
+\sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{tg}\,u &= \mathrm{tg}\,u_1,\\
+\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,\mathrm{tg}\,2u_1 &= \mathrm{tg}\,2u_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
+\sqrt{\frac{b_\nu}{a_\nu}}\,\mathrm{tg}\,2^\nu u_\nu &= \mathrm{tg}\,2^\nu u_{\nu+1},\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{6}$$

[1]) Vgl. Geppert, a. a. O. S. 167ff.

der Reihe nach neue *positive* Veränderliche $u_1, u_2, \ldots u_{\nu+1}, \ldots$ eingeführt. Aus der ersten Gleichung berechnet sich aus der oberen Grenze u des Integrals (5) der Wert von u_1, aus der zweiten u_2 usw. Damit sich $u_{\nu+1}$ *eindeutig* aus u_ν ergibt, soll festgesetzt werden, daß, wenn n eine ganze positive Zahl ist, und $2^\nu u_\nu$ in dem Intervall $n\frac{\pi}{2} \leqq 2^\nu u_\nu \leqq (n+1)\frac{\pi}{2}$ liegt, auch $2^\nu u_{\nu+1}$ in diesem Intervall liegen soll. Dabei sollen die a_k, b_k in (6) im Gegensatz zu § 9, (2) folgende Bedeutung haben:

$$a_1 = +\sqrt{a\,b}\,, \qquad b_1 = \frac{a+b}{2}\,, \tag{7}$$

$$a_\nu = +\sqrt{a_{\nu-1}\,b_{\nu-1}}\,, \; b_\nu = \frac{a_{\nu-1}+b_{\nu-1}}{2}\,. \tag{8}$$

Die Buchstaben a und b sind also gegenüber § 9, (2) in ihrer Bedeutung vertauscht; nach § 9, (7) bleibt dabei aber $M(a, b)$ ungeändert.

Nach unseren Festsetzungen ist nun auch u_ν eindeutige Funktion von $u_{\nu+1}$ und wächst monoton von 0 bis u_ν, wenn $u_{\nu+1}$ von 0 bis $u_{\nu+1}$ wächst. Auch sieht man unschwer ein, daß (6) zulässige Substitutionen zur Transformation des Integrals (5) sind.

Gauß nimmt nun, ohne es in dem Nachlaß zu beweisen, an, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = u_\omega$$

in (6) existiert; wir wollen den Beweis nachher geben; setzen wir also die Konvergenz voraus, so ist es leicht zu zeigen, daß

$$J = \int_0^u \frac{d\,u}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u}} = \frac{u_\omega}{M(a,b)} \tag{9}$$

ist.

Beweis.

Nach (6) ist

$$\operatorname{tg} u = +\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{tg} u_1\,,$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{a}\operatorname{tg} u_1}{\sqrt{b + a\operatorname{tg}^2 u_1}}\,, \quad \cos u = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b + a\operatorname{tg}^2 u_1}}\,,$$

wo alle Wurzeln positiv auszuziehen sind. Hieraus folgt

$$d\,u = \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u_1}\,d\,u_1 = \frac{\sqrt{a\,b}}{(b + a\operatorname{tg}^2 u_1)\cos^2 u_1}\,d\,u_1. \tag{10}$$

Weiter hat man

$$a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u = \frac{a^2 b + a\,b^2\operatorname{tg}^2 u_1}{b + a\operatorname{tg}^2 u_1}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} = \frac{\sqrt{b + a\operatorname{tg}^2 u_1}}{\sqrt{a\,b}\,\sqrt{a + b\operatorname{tg}^2 u_1}}$$

und daher nach (10)

$$\frac{du}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} = \frac{du_1}{\cos^2 u_1\sqrt{(b + a\,\mathrm{tg}^2 u_1)\,(a + b\,\mathrm{tg}^2 u_1)}}$$
$$\frac{du}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} = \frac{du_1}{\sqrt{(b\cos^2 u_1 + a\sin^2 u_1)\,(a\cos^2 u_1 + b\sin^2 u_1)}}. \tag{11}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A = (b\cos^2 u_1 + a\sin^2 u_1)\,(a\cos^2 u_1 + b\sin^2 u_1), \tag{12}$$

so erhält man durch einfache Umformungen der Reihe nach

$$A = \{a + (b-a)\cos^2 u_1\}\{a + (b-a)\sin^2 u_1\} = ab + (b-a)\sin^2 u_1\cos^2 u_1,$$

$$A = ab + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \sin^2 2u_1 = ab + \left\{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - ab\right\}\sin^2 2u_1,$$

$$A = ab\cos^2 2u_1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 2u_1, \tag{13}$$

und darum nach (7)

$$A = a_1^2\cos^2 2u_1 + b_1^2\sin^2 2u_1,$$

und jetzt nach (11)

$$\frac{du}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} = \frac{du_1}{\sqrt{a_1^2\cos^2 2u_1 + b_1^2\sin^2 2u_1}},$$

und allgemein nach (6) und (7)

$$J = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} = \int_0^{u_\nu} \frac{du_\nu}{\sqrt{a_\nu^2\cos^2 2^\nu u_\nu + b_\nu^2\sin^2 2^\nu u_\nu}}. \tag{14}$$

Geht man nun zur Grenze über ($\nu \to \infty$), so erhält man durch dieselben Schlüsse wie S. 53—54.

$$\boxed{J = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} = \frac{u_\omega}{M\,(a,b)},} \tag{15}$$

wo u_ω der Grenzwert der Folge $u, u_1, u_2 \ldots$ in (6) ist. *Die Existenz dieses Grenzwerts wollen wir noch beweisen:*

Da nach (8) das arithmetische Mittel b_ν größer als das geometrische Mittel a_ν ist ($a_{\nu-1} \neq b_{\nu-1}$), so kann man setzen

$$+\sqrt{\frac{b_\nu}{a_\nu}} = 1 + \varepsilon_\nu\,, \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots) \tag{16}$$

wo die positiven Zahlen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \tag{17}$$

eine monotone Nullfolge bilden. Setzt man

$$2^\nu u_\nu = a_\nu\,, \quad 2^\nu u_{\nu+1} = a_{\nu+1}\,, \tag{18}$$

so ist nach (6) und (16)

$$\operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} = (1+\varepsilon_\nu) \operatorname{tg} \alpha_\nu \,, \tag{19}$$

$$\operatorname{tg} (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} - \operatorname{tg} \alpha_\nu}{1 + \operatorname{tg} \alpha_{\nu+1} \operatorname{tg} \alpha_\nu} = \frac{\varepsilon_\nu \operatorname{tg} \alpha_\nu}{1 + (1+\varepsilon_\nu) \operatorname{tg}^2 \alpha_\nu} \,. \tag{20}$$

Nehmen wir fürs Erste an, daß $\cos \alpha_\nu$ für keinen Wert von ν verschwindet, so erhält man nach Multiplikation von Zähler und Nenner rechts mit $\cos^2 \alpha_\nu$

$$\operatorname{tg} (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) = \frac{\varepsilon_\nu \sin \alpha_\nu \cos \alpha_\nu}{1 + \varepsilon_\nu \sin^2 \alpha_\nu} \,.$$

also gemäß der Festsetzung auf S. 56

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} |\ \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu\ | &< \varepsilon_\nu \,, \\ |\ \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu\ | &< \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_\nu \,, \end{aligned} \tag{21}$$

wo der arc tg im ersten Quadranten genommen werden soll. Entsprechend hat man

$$|\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1}| < \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_{\nu+1} < \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_\nu \tag{22}$$

usw., da die ε_ν-Folge eine monotone Nullfolge ist. Aus (21), (22) und (18) folgt

$$\begin{aligned} |u_{\nu+1} - u_\nu| &< \frac{1}{2^\nu} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_\nu \,, \\ |u_{\nu+2} - u_{\nu+1}| &< \frac{1}{2^{\nu+1}} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_\nu \,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |u_{\nu+k} - u_{\nu+k-1}| &< \frac{1}{2^{\nu+k-1}} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_\nu \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Addiert man und setzt rechts statt der endlichen geometrischen Reihe die unendliche, so erhält man

$$|u_{\nu+1} - u_\nu| + |u_{\nu+2} - u_{\nu+1}| + \ldots + |u_{\nu+k} - u_{\nu+k-1}| < \frac{1}{2^{\nu-1}} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_\nu \,. \tag{24}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} |u_{\nu+k} - u_\nu| &= |(u_{\nu+1} - u_\nu) + (u_{\nu+2} - u_{\nu+1}) + \ldots + (u_{\nu+k} - u_{\nu+k-1})| \\ &\leqq |u_{\nu+1} - u_\nu| + |u_{\nu+2} - u_{\nu+1}| + \ldots + |u_{\nu+k} - u_{\nu+k-1}| \end{aligned}$$

und jetzt nach (24)

$$|u_{\nu+k} - u_\nu| < \frac{1}{2^{\nu-1}} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_\nu \,. \tag{25}$$

Da die rechte Seite durch passende Wahl von ν kleiner als die vorgegebene positive Zahl ε gemacht werden kann, und (25) für alle $k = 1, 2, 3 \ldots$ gilt, so strebt nach dem allgemeinen Konvergenzprinzip u_ν mit wachsendem ν einem Grenzwert u_∞ zu, und zwar sehr rasch, da die ε_ν sehr rasch nach Null konvergieren. *Nehmen wir zweitens an,* daß der erste Winkel in (6), dessen Kosinus verschwindet, der Winkel $2^\nu u_\nu$ ist, daß also

$$2^\nu u_\nu = (2n+1) \frac{\pi}{2} \tag{26}$$

ist, wo n eine ganze positive Zahl ist, so folgt aus (6) vermöge unserer Festsetzungen $u_\nu = u_{\nu+1} = u_{\nu+2} = \ldots$ Die durch (6) definierte Zahlenfolge $u, u_1, u_2, \ldots$ bricht also bei u_ν ab, das jetzt der Grenzwert u_ω ist. Setzt man nun in (14)

$$2^\nu u_\nu = \varphi\,,$$

so folgt aus (14) und (26)

$$J = \frac{1}{2^\nu}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_\nu^2\cos^2\varphi + b_\nu^2\sin^2\varphi}} = \frac{2n+1}{2^\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_\nu^2\cos^2\varphi + b_\nu^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Das letzte Integral hat aber nach § 10, (1) den Wert

$$\frac{\pi}{2\,M(a,b)}\,;$$

also hat man

$$J = \frac{2n+1}{2^\nu}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{M(a,b)}\,,$$

oder nach (26)

$$J = \frac{u_\nu}{M(a,b)} = \frac{u_\omega}{M(a,b)}\,,$$

da $u_\nu = u_{\nu+1} \ldots = u_\omega$ war. *Die Formel (15) gilt also in allen Fällen.* Mit Hilfe der Formel (15) läßt sich nun das elliptische Integral sehr bequem und rasch berechnen.

Bemerkung. Man *kann (6), (7) und (15) auch zur Lösung des Umkehrproblems* verwenden. Ist also in (15) der Integralwert J gegeben, so findet man aus (15), da $M(a, b)$ als bekannt angesehen werden kann, den Wert für u_ω. Ist nun $\sqrt{\frac{b_\nu}{a_\nu}}$ schon sehr nahe an Eins, so identifiziere man in (6) $u_{\nu+1}$ mit u_ω und berechne nun rückwärts aus (6) den Wert u, d. h. die obere Grenze des Integrals in (15).

§ 12. Diophantische Gleichung $a\,x - by = 1$. Geometrische Betrachtungen

Wir wollen in diesem und den folgenden Paragraphen die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche mit Hilfe geometrisch anschaulicher Methoden entwickeln[1]).

[1]) *F. Klein* hat in verschiedenen Arbeiten die Kettenbruchlehre geometrisch gedeutet. Man vgl. die autogr. Vorlesung über „Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie", Leipzig 1907, Heft 1, S. 9ff. Weiter *F. Klein*, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, II. Bd. 1922, S. 208ff. und III. Bd. 1923, S. 287ff. Während aber *Klein* den Kettenbruch als gegeben annimmt und hernach die Verhältnisse geometrisch deutet, ist bei der folgenden Darstellung der umgekehrte Weg eingeschlagen. Durch geometrische Betrachtungen wird erst der Kettenbruch erzeugt, und dann werden auch seine Haupteigenschaften *geometrisch* abgeleitet.

Gegeben sei die Gleichung

$$ax - by = 1, \tag{1}$$

wo a und b *ganze* Zahlen sind. Es sollen die Zahlen x und y ebenfalls als *ganze* Zahlen so bestimmt werden, daß sie (1) genügen. Eine solche Gleichung heißt eine *Diophantische Gleichung* nach dem Mathematiker *Diophantus* aus Alexandria (3. Jahrhundert n. Chr. ?), der sich zum ersten Male mit ähnlichen Aufgaben beschäftigt hat.

Soll sich die Gleichung (1) in ganzen Zahlen x und y lösen lassen, so ist notwendig, daß a und b relativ prim zueinander sind, d. h. keinen gemeinsamen von ± 1 verschiedenen Faktor besitzen; denn wäre die ganze Zahl g ein solcher, so wäre in (1) die linke Seite durch g teilbar, die rechte aber nicht, was nicht sein kann. Wir setzen daher stets voraus, daß a und b relativ prim sind. Gibt man in (1) x einen beliebigen ganzzahligen Wert, so kann dann das zugehörige y berechnet werden; dieses wird aber im allgemeinen keine ganze Zahl sein. Das Problem ist also, x als *ganze* Zahl so zu finden, daß auch y *ganzzahlig* wird. Wir werden sehen, daß unter der gemachten Voraussetzung (1) stets eine Lösung, ja unendlich viele Lösungen zuläßt. Es wird sich auch zeigen, daß, wenn (1) gelöst ist, auch die allgemeinere Gleichung

$$ax - by = c \tag{2}$$

gelöst werden kann, wo c ebenfalls eine ganze Zahl ist. Der Gleichung (1) kann man eine wichtige geometrische Deutung geben, die zugleich zu ihrer Lösung führen wird.

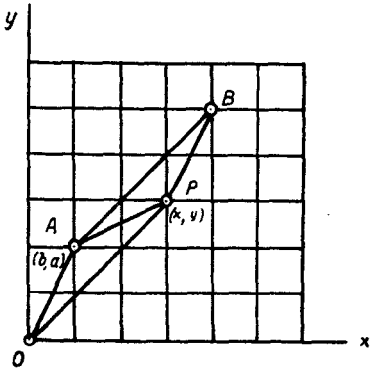

Fig. 16

Das Zahlengitter

Gibt man den beiden Veränderlichen x und y alle möglichen ganzzahligen positiven und negativen (die Null eingeschlossen) Werte und trägt jedes Wertepaar (x, y) als Koordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhält man lauter Punkte, die auf parallelen Geraden zu den Koordinatenachsen in ganzzahligen Abständen liegen: sie zerlegen die Ebene in quadratische Maschen von der Länge 1. Die so erhaltenen Punkte sollen *Gitterpunkte* heißen: ihre Gesamtheit nennen wir das *Zahlengitter*. Wir bestimmen nun (Fig. 16) den Gitterpunkt A mit den Koordinaten (b, a) und ebenso den Gitterpunkt P mit den Koordinaten (x, y). Ist O der Ursprung des Koordinatensystems, dann ist der Inhalt des Dreiecks PAO gleich

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(ax - by),$$

also ist nach (1)

$$\Delta P A O = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Da der Inhalt positiv ist, so liegt bei der angenommenen Wahl der positiven Koordinatenachsen die Dreiecksfläche beim Umlauf PAO zur linken. Die Aufgabe ist also, den Gitterpunkt P so zu wählen, daß die Gleichung (3) erfüllt ist. Ehe wir zur Lösung dieser Aufgabe schreiten, beweisen wir den wichtigen

Satz 1. Ein Gitterdreieck vom Inhalt $= \frac{1}{2}$ enthält außer den Ecken weder im Inneren noch auf dem Rand einen Gitterpunkt.

Man kann das Koordinatensystem stets so legen, daß eine Ecke des Dreiecks der Ursprung O des Systems ist. Wir wollen also zeigen, daß in dem Dreieck PAO der Fig. 16 weder auf dem Rand noch im Innern außer den Ecken Gitterpunkte liegen. Läge z. B. Q mit den Koordinaten (c, d) im Inneren des Dreiecks, so wäre der Inhalt des Dreiecks QAO kleiner als der Inhalt des Dreiecks PAO, d. h. kleiner als $\frac{1}{2}$. Der Inhalt des Dreiecks QAO ist aber

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} c & d \\ b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (c a - b d) ,$$

d. h. mindestens $= \frac{1}{2}$, da $(ca - bd)$ eine von Null verschiedene ganze (positive) Zahl ist; die Zahl ist positiv, da der Umlauf QAO die Dreiecksfläche zur linken läßt. Liegt Q auf dem Rande etwa auf OP, so erhält man ebenfalls einen Widerspruch, wenn man mit dem Dreieck QAO ebenso verfährt.

Zieht man durch A die Parallele zu OP, durch P die Parallele zu OA, so erhält man den Gitterpunkt B, und man hat jetzt das „Gitter-Parallelogramm" $OPBA$ vom Inhalt 1 und den

Satz 2. Ein Gitterparallelogramm (dessen Ecken also Gitterpunkte sind) *vom Inhalt $= 1$ enthält außer den Eckpunkten weder im Innern noch auf dem Rand einen weiteren Gitterpunkt.*

Legt man nun an das Parallelogramm $OPBA$ weitere kongruente Parallelogramme an dasselbe an, so kann jetzt die Ebene lückenlos mit Gitterparallelogrammen, die kongruent zu $OPBA$ sind, bedeckt werden, und zwar so, daß in jedem Gitterpunkt des quadratischen Gitters vier Parallelogramme des neuen Gitters zusammenstoßen. Dies ist eine Eigenschaft des Zahlengitters, die für die Zahlentheorie von großer Wichtigkeit ist. Wir kommen weiter unten, § 14, S. 75, noch einmal darauf zurück.

Graphische Lösung der Gleichung

$$a x - b y = 1.$$

Wir haben, wie oben ausgeführt wurde, zum Gitterpunkt $P = (b, a)$ (Fig. 17) einen anderen (x, y) so zu finden, daß er mit OP ein Dreieck vom

Inhalt $=\frac{1}{2}$ bestimmt. Da b und a relativ prim sind, so liegt zwischen O und P kein weiterer Gitterpunkt; denn wäre (c, d) ein solcher, so wäre

$$\frac{c}{d}=\frac{b}{a}$$

und $d < a$, d. h. b und a hätten gegen die Voraussetzung einen Faktor gemein. Wir setzen voraus, daß a und b positive Zahlen sind; wäre dies nicht der Fall, so würde sich die folgende Betrachtung eben nicht im ersten Quadranten, sondern in einem anderen abspielen; weiter sei $a < b$, andernfalls müßte für das Folgende die x-Achse mit der y-Achse vertauscht werden. Der Neigungswinkel von OP gegen die x-Achse ist jetzt auf Grund unserer Annahmen kleiner als 45^0. Auf der x-Achse sei P_0 mit der Abszisse $+1$ und auf der y-Achse der Punkt P_{-1} mit der Ordinate $+1$. Das Dreieck OP_0P_{-1} ist so ein Gitterdreieck vom Inhalt $=\frac{1}{2}$. Nun verwandeln wir dieses Dreieck unter Beibehaltung der Grundlinie OP_0 in ein inhaltgleiches, ziehen also durch P_{-1} die Parallele zu OP_0; auf ihr tragen wir OP_0 so oft als möglich ab bis P_1, ohne jedoch OP zu überschreiten. Jedenfalls muß es möglich sein, einmal OP_0 abzutragen, ohne daß dabei OP überschritten würde, da ja OP mit der x-Achse einen Winkel $< 45^0$ bildet. Jetzt ist OP_0P_1 ein Gitterdreieck vom Inhalt $=\frac{1}{2}$. Jetzt wird dieses Dreieck in ein inhaltgleiches verwandelt unter Beibehaltung der Grundlinie OP_1; darum ziehe man durch P_0 die Parallele zu OP_1; auf ihr trage man OP_1 von P_0 aus so oft ab, bis man der Geraden OP am nächsten kommt: der so erhaltene Punkt heiße P_2. Es muß hier ebenfalls mindestens *einmal* möglich sein, auf dieser Parallelen OP_1 von P_0 abzutragen, ohne daß OP überschritten wird. Denn hätte man $P_{-1}P_1$ einmal mehr als geschehen ist, um OP_0 bis Q verlängert, so würde Q auf der Seite von P_0 bezüglich OP liegen, und P_0Q ist jetzt parallel und gleich OP_1. Das Gitterdreieck OP_2P_1 vom Inhalt $=\frac{1}{2}$ wird nun unter Beibehaltung der Grundlinie OP_2 in ein inhaltgleiches verwandelt; darum ziehe man durch P_1 die Parallele

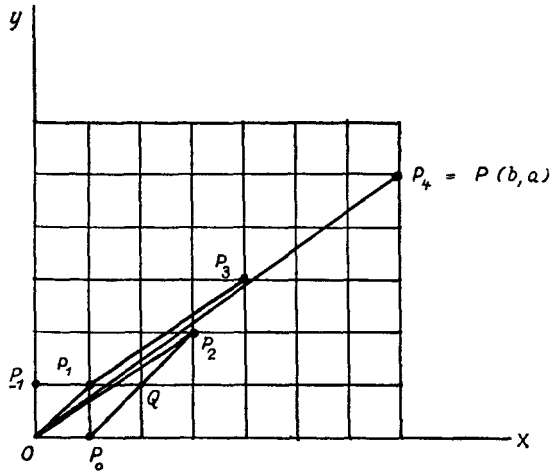

Fig. 17

zu OP_2 und trage auf ihr von P_1 die Strecke OP_2 so oft ab, bis man OP am nächsten kommt, der Endpunkt heiße P_3; auch dieses Abtragen muß mindestens einmal möglich sein. Jetzt hat das Gitterdreieck OP_2P_3 den Inhalt $\frac{1}{2}$. So fahre man fort und kommt zu einer Reihe von Gitterdreiecken

$$OP_0P_1, \quad OP_1P_2, \quad OP_2P_3, \quad \ldots, \quad OP_\lambda P_{\lambda+1} \ldots$$

vom Inhalt $\frac{1}{2}$ (dieser absolut genommen).

Diese Konstruktion muß nun notwendig einmal zum Gitterpunkt P führen, d. h. einer der Punkte

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_\lambda, \quad P_{\lambda+1} \ldots$$

muß mit P zusammenfallen; denn die Strecken OP_1, OP_2, $OP_3 \ldots$ wachsen unaufhörlich, und die Gerade OP liegt immer innerhalb des spitzen Winkels, den zwei aufeinander folgende Strecken miteinander bilden. Es muß also einmal vorkommen, daß P innerhalb eines Dreiecks $OP_\lambda P_{\lambda+1}$ fällt; dies würde aber dem Satz 1 widersprechen, da das Dreieck den Inhalt $\frac{1}{2}$ hat und darum in seinem Inneren keinen Gitterpunkt P enthalten kann. Fällt also P_ϱ mit P zusammen, so ist der Punkt $P_{\varrho-1}$ der gesuchte Gitterpunkt, der mit dem Punkt P und dem Punkt O ein Dreieck vom Inhalt $\frac{1}{2}$ bildet.

Wenn nun beim Umlaufen des Dreiecks $P_{\varrho-1}PO$ in dieser Folge die Dreiecksfläche bei der angenommenen Lage des Koordinatensystems zur linken liegt und $P_{\varrho-1}$ die Koordinaten x, y hat, so ist

$$\text{Inhalt } P_{\varrho-1}PO = +\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \text{ also}$$

$$ax - by = 1,$$

die Koordinaten x, y von $P_{\varrho-1}$ lösen also die Diophantische Gleichung. Wenn aber die Dreiecksfläche zur *Rechten* liegt, so ist

$$\text{Inhalt } P_{\varrho-1}PO = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \text{ also}$$

$$ax - by = -1.$$

Nun nehme man statt des Punktes x, y den Punkt $-x, -y$, und diese letzteren Zahlen stellen dann eine Lösung der Diophantischen Gleichung dar.

Wir zeigen jetzt, wie aus der einen Lösung, deren Existenz und Konstruktion gezeigt worden ist, *unendlich viele andere Lösungen* hergeleitet werden können.

Seien (x_0, y_0) die Koordinaten des Gitterpunktes A_0 (Fig. 18, schematische Figur), so daß

$$ax_0 - by_0 = 1 \tag{4}$$

ist, oder daß das Gitterdreieck A_0PO den Inhalt $+\frac{1}{2}$ hat, so verwandle man das Dreieck A_0PO unter Beibehaltung der Grundlinie OP in

andere inhaltgleiche, indem man durch A_0 die Parallele zu OP zieht und auf ihr von A_0 nach beiden Seiten die Strecke OP beliebig oft abträgt: so gelangt man zu den Gitterpunkten

$$\ldots, A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, \tag{5}$$

und es ist jetzt

$$A_\sigma PO = +\frac{1}{2}, \quad \sigma = (\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

d. h. die Koordinaten jedes Punktes A_σ lösen die Diophantische Gleichung. Die oben angegebene Konstruktion kann so ausgeführt werden, daß man das Dreieck

OPP' ($PP' \perp x$-Achse)

der Fig. 18 parallel mit sich in die Lage $A_0A_1'A_1$, $A_1A_2'A_2$ verschiebt usw. Hat der Punkt A_σ die Koordinaten X, Y, so ergibt sich aus der Figur 18.

$$X = x_0 + b\sigma,$$
$$Y = y_0 + a\sigma, \tag{6}$$

wo σ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl einschließlich der Null ist. In der Tat stellen X, Y Lösungen von (1) dar, wie man durch Einsetzen sofort erkennt, wenn (4) beachtet wird.

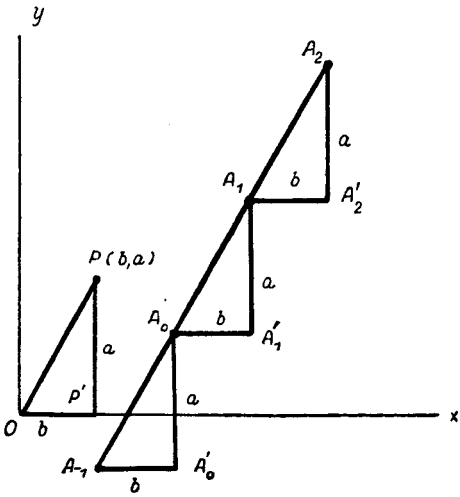

Fig. 18

Daß durch die Gleichungen (6) ***alle ganzzahligen*** Lösungen der Gleichung (1) dargestellt sind, sieht man leicht ein. Die Gleichungen (6) stellen nichts anderes als die Gleichung der Geraden $ax - by = 1$ in Parameterform dar, wo σ der Parameter ist; gibt man also σ in (6) einen ***beliebigen*** (nicht notwendig ganzzahligen) Wert, so erhält man aus (6) die Koordinaten eines ***beliebigen*** Punktes der Geraden. Soll dies aber ein ***Gitterpunkt*** sein, so muß notwendig σ eine ganze Zahl sein; denn jedenfalls muß σ rational sein, etwa $= \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen und relativ prim sind. Sollen sich jetzt aus (6) ganzzahlige Werte für X, Y ergeben, so müßte q in b und a aufgehen, was nur möglich ist mit $q = \pm 1$, da a und b relativ prim sind.

Hat man die Lösungen von (1) gefunden, so hat man auch sofort die Lösungen der allgemeineren Diophantischen Gleichung (2), nämlich von

$$ax - by = c, \tag{7}$$

wo a und b wieder relativ prim sind und c irgendeine ganze Zahl ist.

Die Lösungen sind nämlich durch die Gleichungen

$$x = c\,x_0 + b\sigma,$$
$$y = c\,y_0 + a\sigma, \tag{8}$$

gegeben, wo x_0, y_0 eine Lösung von (1) bedeuten und σ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl einschließlich der Null ist. Denn durch Einsetzen von (8) in (7) folgt mit Berücksichtigung von (4)

$$a\,x - b\,y = a\,(c\,x_0 + b\sigma) - b\,(c\,y_0 + a\sigma) = c\,(a\,x_0 - b\,y_0) = c.$$

Daß durch (8) *alle* Lösungen gegeben sind, zeigt man ähnlich wie oben.

§ 13. Analytische Auflösung der diophantischen Gleichung $a\,x - b\,y = 1$.

So interessant die in § 12 gegebene geometrische Lösung der Gleichung

$$a\,x - b\,y = 1 \tag{1}$$

ist, so hat sie praktisch doch kaum einen Wert, da sehr bald nicht mehr zu unterscheiden ist, ob die S. 62 genannten Punkte P_1, P_2, P_3, ... diesseits oder jenseits der Geraden $O\,P$ liegen oder auf ihr selbst. Theoretisch ist diese Konstruktion aber sehr wichtig, da diese, in die Sprache der Algebra übersetzt, eine bequem zu leistende analytische Lösung geben wird, die absolute Genauigkeit besitzt. Auch werden wir so leicht zu den wichtigsten Eigenschaften der *Kettenbrüche* geführt.

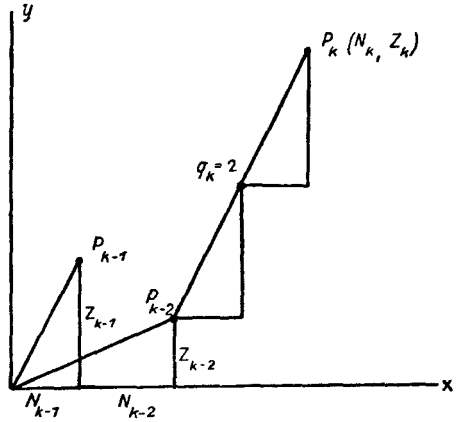

Fig. 19

Das Dreieck $P_{k-2}\,P_{k-1}O$ in Fig. 19 sei ein Dreieck vom Inhalt $+\frac{1}{2}$, so daß also der Umlauf um das Dreieck bei der angegebenen Folge die Dreiecksfläche links läßt.

Wir bezeichnen allgemein die Koordinaten des Punktes P_k mit (N_k, Z_k), dann hat P_{k-1} die Koordinaten (N_{k-1}, Z_{k-1}) und P_{k-2} die Koordinaten (N_{k-2}, Z_{k-2}). Es ist jetzt also

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} N_{k-2} & Z_{k-2} \\ N_{k-1} & Z_{k-1} \end{vmatrix} = +\frac{1}{2},$$

oder

$$Z_{k-1}\,N_{k-2} - N_{k-1}\,Z_{k-2} = +1. \tag{2}$$

Die beiden Brüche

$$\frac{Z_{k-2}}{N_{k-2}},\quad \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} \tag{3}$$

sind die Richtungsfaktoren der beiden Geraden OP_{k-2} und OP_{k-1}, für die aus der Fig. 19 oder aus (2) folgt

$$\frac{Z_{k-2}}{N_{k-2}} < \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}. \tag{4}$$

Die beiden Brüche in (3) sind *„irreduzibel"*, d. h. sie können nicht gekürzt werden, oder, geometrisch gesprochen: auf OP_{k-2} und OP_{k-1} liegt kein Gitterpunkt; dies folgt entweder direkt aus Satz 1 in § 12, da ja $P_{k-2}P_{k-1}O = \frac{1}{2}$ ist oder auch arithmetisch aus (2). Denn würde etwa die positive ganze von 1 verschiedene Zahl ϱ ein Teiler von Z_{k-2} und N_{k-2} sein, so wäre die linke Seite von (2) durch ϱ teilbar, die rechte aber nicht, was nicht sein kann.

Nach der in §12 angegebenen Konstruktion (Fig. 17) erhielt man den Punkt P_k dadurch, daß man durch P_{k-2} die Parallele zu OP_{k-1} zog und auf ihr ein ganzzahliges Vielfaches (q_k-faches) von OP_{k-1} abtrug, bis man an OP am nächsten herankam. Man kann auch sagen, daß man den *Vektor* OP_{k-2} um ein q_k-faches ($q_k \geqq 1$) des *Vektors* OP_{k-1} zu vermehren hat. Man hat also ähnlich wie am Schluß von § 12

$$\begin{aligned} Z_k &= q_k Z_{k-1} + Z_{k-2}, \\ N_k &= q_k N_{k-1} + N_{k-2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Da der Inhalt des Dreiecks $P_{k-1}P_kO$ jetzt $= -\frac{1}{2}$ ist, so folgt wie oben vor (2)

$$Z_k N_{k-1} - N_k Z_{k-1} = -1, \tag{6}$$

was sich auch rechnerisch sofort bestätigt, wenn aus (5) die Werte von Z_k, N_k in die linke Seite von (6) eingetragen werden und (2) beachtet wird.

Von P_k gelangt man nun ganz entsprechend zu P_{k+1} und man hat wie in (5) und (6)

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= q_{k+1} Z_k + Z_{k-1}, \\ N_{k+1} &= q_{k+1} N_k + N_{k-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

wo q_{k+1} eine ganze positive Zahl $\geqq 1$ ist, und

$$Z_{k+1} N_k - N_{k+1} Z_k = +1. \tag{8}$$

Aus (5) ergibt sich

$$\frac{Z_k}{N_k} = \frac{q_k Z_{k-1} + Z_{k-2}}{q_k N_{k-1} + N_{k-2}}, \tag{9}$$

und wir wollen jetzt zeigen, daß, wenn man hier statt q_k die Größe

$$q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$$

setzt, die rechte Seite von (9) in

$$\frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}}$$

übergeht. In der Tat erhält man der Reihe nach mit Hilfe von (5) und (7)

$$\frac{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) Z_{k-1} + Z_{k-2}}{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) N_{k-1} + N_{k-2}} = \frac{q_k Z_{k-1} + Z_{k-2} + \frac{Z_{k-1}}{q_{k+1}}}{q_k N_{k-1} + N_{k-2} + \frac{N_{k-1}}{q_{k+1}}} = \frac{Z_k + \frac{Z_{k-1}}{q_{k+1}}}{N_k + \frac{N_{k-1}}{q_{k+1}}}$$

$$= \frac{q_{k+1} Z_k + Z_{k-1}}{q_{k+1} N_k + N_{k-1}} = \frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}}.$$

Nun kehren wir zu Fig. 17 S. 62 zurück und verfolgen die dort gegebene geometrische Konstruktion vom *Anfang bis zum Schluß*.

$$\begin{array}{llll} P_{-1} & \text{hat die Koordinaten} & N_{-1} = 0, & Z_{-1} = 1 \\ P_0 & \quad ,, \quad ,, \quad ,, & N_0 = 1, & Z_0 = 0 \\ P_1 & \quad ,, \quad ,, \quad ,, & N_1, & Z_1 \\ P_2 & \quad ,, \quad ,, \quad ,, & N_2, & Z_2 \text{ usw.} \end{array} \tag{10}$$

Den Punkt P_1 erhielt man dadurch, daß man auf der Parallelen zur x-Achse durch P_{-1} das q_1-fache von OP_0 $(= +1)$ aus abtrug, bis man den nächsten Gitterpunkt bei OP erreichte: Es ist also

$$N_1 = q_1, \; Z_1 = 1 \tag{11}$$

Jetzt hat man nach (5) oder (7)

$$Z_2 = q_2 Z_1 + Z_0 = q_2,$$
$$N_2 = q_2 N_1 + N_0 = q_2 q_1 + 1,$$

dann ebenso

$$Z_3 = q_3 Z_2 + Z_1 = q_3 q_2 + 1,$$
$$N_3 = q_3 N_2 + N_1 = q_3 (q_2 q_1 + 1) + q_1,$$

usw. Man kann dies kurz durch das geschickte *Schema* darstellen:

			q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
Z	1	0	1	q_2	$q_3 q_2 + 1$		
N	0	1	q_1	$q_2 q_1 + 1$	$q_3 (q_2 q_1 + 1) + q_1$		

Hier steht z. B. in der mit q_3 überschriebenen Spalte der Wert von Z_3 und N_3 in der entsprechenden Vertikalreihe. Man hat von vorne zu bilden

Z-Reihe $\quad q_1 \cdot 0 + 1;\; q_2 \cdot 1 + 0,\; q_3 \cdot q_2 + 1, \ldots$

N-Reihe $\quad q_1 \cdot 1 + 0;\; q_2 \cdot q_1 + 1,\; q_3 (q_2 q_1 + 1) + q_1, \ldots$

Nun haben wir in § 12 gesehen, daß einer der Punkte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ mit $P(b, a)$ zusammenfallen muß: Es sei der Punkt P_σ, dann ist nach (5)

$$a = Z_\sigma = q_\sigma Z_{\sigma-1} + Z_{\sigma-2},$$
$$b = N_\sigma = q_\sigma N_{\sigma-1} + N_{\sigma-2}. \tag{12}$$

Nach (11) war

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1},$$

und oben wurde gezeigt, daß z. B. $\frac{Z_2}{N_2}$ aus $\frac{Z_1}{N_1}$ dadurch hervorgeht,

daß man statt q_1 die Zahl $q_1 + \frac{1}{q_2}$ setzt. Man erhält so der Reihe nach:

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}, \quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \quad \frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}}, \quad \frac{Z_4}{N_4} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4}}}} \quad \cdots \tag{13}$$

und endlich

$$\frac{Z_\sigma}{N_\sigma} = \frac{a}{b} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 \cdots + \cfrac{1}{q_\sigma}}}} \tag{14}$$

Diese eigentümliche Darstellung von $\frac{a}{b}$ nennt man einen *Kettenbruch*. Die Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\sigma$ nennt man die *Teilnenner* und die Brüche $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots$ in (13), die selbst wieder Kettenbrüche sind und die aus (14) dadurch entstehen, daß man den Kettenbruch beim ersten, zweiten, dritten usw. Teilnenner aufhören läßt, den ersten, zweiten, dritten usw. *Näherungsbruch*.

Gelingt es also, den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch (14) umzuwandeln, so erhält man die *Teilnenner* q_k und dann mit Hilfe des Schemas auf S. 67 die Näherungsbrüche $\frac{Z_k}{N_k}$.

Wir wollen nun an einem Beispiel zeigen, wie ein solcher rationaler Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch verwandelt wird. Es wird sich zeigen, daß in jedem Falle alles leicht gemacht werden kann.

Beispiel. $\frac{a}{b} = \frac{14}{39}$ *soll in einen Kettenbruch verwandelt werden.* Es ist der Reihe nach:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{14}{39} &= \frac{1}{\frac{39}{14}} = \frac{1}{2 + \frac{11}{14}}, \\ \frac{11}{14} &= \frac{1}{\frac{14}{11}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{11}}, \\ \frac{3}{11} &= \frac{1}{\frac{11}{3}} = \frac{1}{3 + \frac{2}{3}}, \\ \frac{2}{3} &= \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Es ist also

$$\frac{a}{b} = \frac{14}{39} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} \tag{16}$$

Die Teilnenner sind 2, 1, 3, 1, 2, und man bezeichnet den Kettenbruch (16) oft kurz durch das Symbol

$$\frac{a}{b} = (2, 1, 3, 1, 2) .$$

Die Rechnung (15) ist identisch mit der „Staffelrechnung", die angewendet wird, um den größten gemeinsamen Teiler von zwei ganzen Zahlen zu bestimmen. Wir werden dieses Verfahren als „Euklidischen Algorithmus" in § 17, S. 87, näher zu untersuchen haben. Das *Schema der „Staffelrechnung"* würde für unser Beispiel sein.

$$\begin{array}{r} 39 : 14 = \boxed{2} \\ \underline{28} \\ 14 : 11 = \boxed{1} \\ \underline{11} \\ 11 : 3 = \boxed{3} \\ \underline{9} \\ 3 : 2 = \boxed{1} \\ \underline{2} \\ 2 : 1 = \boxed{2} \end{array}$$

Man dividiert zuerst mit 14 in 39, geht $\boxed{2}$ mal, Rest 11; jetzt wird mit dem Rest 11 in den alten Divisor 14 dividiert, geht $\boxed{1}$ mal, Rest 3; nun wird wieder mit dem Rest 3 in den früheren Divisor 11 dividiert usw., bis die Division aufgeht; der letzte Divisor (1) ist der größte gemeinsame Teiler von 39 und 14, und die *Zahlen* (eingerahmt), *die angeben, wieviel die Divisionen an Ganzen ergeben haben, sind die Teilnenner.*

Die Näherungsbrüche in dem Beispiel sind der Reihe nach

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{1}}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

Man erhält sie jetzt als gewöhnliche Brüche am schnellsten mit Hilfe des Schemas (s. S. 67)

			$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
Z	1	0	1	1	4	5	$\underline{\underline{14}}$
N	0	1	2	3	11	14	$\underline{\underline{39}}$

(17)

Die Näherungsbrüche haben also der Reihe nach die Werte

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{11}, \quad \frac{5}{14}, \quad \frac{14}{39}$$

und die Probe für richtiges Rechnen ist natürlich, daß der letzte Nähe-

rungsbruch $\frac{14}{39}$ mit dem Ausgangsbruch identisch sein muß. Auch die Formeln (2), (6) usw. findet man bestätigt:

$$\begin{aligned} 1\cdot 3 - 1\cdot 2 &= +1;\quad 1\cdot 11 - 4\cdot 3 = -1;\\ 4\cdot 14 - 5\cdot 11 &= +1;\quad 5\cdot 39 - 14\cdot 14 = -1, \end{aligned} \tag{18}$$

wobei man beachte, daß die linken Seiten zweigliedrige Determinanten aus dem Schema (17) sind.

Die letzte Formel (18) liefert *sofort eine Lösung der Diophantischen Gleichung* $ax - by = 1$, die jetzt für unser Zahlenbeispiel lautet

$$14x - 39y = 1; \tag{19}$$

schreibt man statt der letzten Gleichung (18)

$$14\cdot 14 - 39\cdot 5 = 1,$$

so hat man mit

$$x_0 = 14,\ y_0 = 5$$

eine Lösung von (19). Die allgemeinste Lösung ist dann nach § 12, (6) durch

$$X = 14 + 39\sigma,\ Y = 5 + 14\sigma$$

gegeben, wo σ irgendeine ganze positive oder negative Zahl einschließlich der Null ist.

Aus dem Beispiel geht unmittelbar hervor, wie die allgemeinste Diophantische Gleichung

$$ax - by = c$$

zu lösen ist. Wir unterlassen, dies ausdrücklich zu formulieren; überhaupt bleibe von nun an die Diophantische Gleichung aus dem Spiele, da sie für uns nur das Mittel war, auf natürliche und anschauliche Weise *den Begriff eines Kettenbruchs* zu gewinnen.

§ 14. Die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche geometrisch abgeleitet

Wir stellen zuerst die in § 13 gefundenen Ergebnisse hier noch einmal zusammen. Nach § 13, (5) ist

$$\begin{aligned} Z_k &= q_k Z_{k-1} + Z_{k-2},\\ N_k &= q_k N_{k-1} + N_{k-2}, \end{aligned} \tag{1}$$

und nach (6)

$$Z_k N_{k-1} - Z_{k-1} N_k = (-1)^{k+1}, \tag{2}$$

wobei der Beweis für das Vorzeichen noch zu leisten ist. Zunächst ergibt sich aus § 13, (2) und (6), daß, wenn k in (2) um 1 wächst, die rechte Seite das Vorzeichen wechseln muß; dies ist auch nach (2) wirklich der Fall. Für $k = 1$ hat man ferner nach § 13, (10) und (11)

$$Z_0 = 0,\quad N_0 = 1,\quad Z_1 = 1,\quad N_1 = q_1.$$

Die Formel (2) lautet für $k = 1$

$$Z_1 N_0 - Z_0 N_1 = 1;$$

setzt man die vorhergehenden Werte für Z_0, N_0, Z_1, N_1 hier ein, so stimmen die beiden Seiten überein. Daraus folgt, daß (2) allgemein gilt.

Wir zeigen nun zuerst, daß

$$\frac{Z_1}{N_1} > \frac{Z_3}{N_3} > \frac{Z_5}{N_5} > \cdots > \frac{Z_{2\nu+1}}{N_{2\nu+1}} > \frac{a}{b} > \frac{Z_{2\nu}}{N_{2\nu}} > \cdots > \frac{Z_4}{N_4} > \frac{Z_2}{N_2} > \frac{Z_0}{N_0} \quad (3)$$

ist, wobei vorausgesetzt sei, daß die angeschriebenen Näherungsbrüche *wirkliche* Näherungsbrüche seien, daß also der Kettenbruch selbst nicht unter den $\frac{Z_k}{N_k}$ in (3) aufgezählt sei. Die Richtigkeit von (3) folgt unmittelbar aus der Fig. 17, S. 62; denn aus der dort gegebenen Konstruktion folgt, daß OP_1 mit der x-Achse einen größeren Winkel bildet als OP_3, OP_3 einen größeren als OP_5 usw. und alle einen größeren als OP: dem größeren Winkel entspricht aber der größere Richtungsfaktor; nun ist aber $\frac{Z_k}{N_k}$ der Richtungsfaktor von OP_k, also ist der erste Teil von (3) bewiesen, für $\frac{Z_2}{N_2}$, $\frac{Z_4}{N_4}$ ... gilt Entsprechendes.

Nun versteht man auch, warum diese Brüche als *Näherungsbrüche* des Kettenbruchs $\frac{a}{b}$ in § 13 bezeichnet wurden: die Strahlen OP_1, OP_3, OP_5 ... in der Fig. 17 kommen von der linken Seite immer näher an die Gerade OP heran, und die Strahlen OP_0, OP_2, OP_4 ... von der rechten. Wir fassen dies zusammen in den

Satz 1. Die Näherungsbrüche mit ungeradem Index ($2\nu+1$ in (3)) bilden eine fallende, die mit geradem Index eine steigende Zahlenfolge; der wahre Wert $\frac{a}{b}$ des Kettenbruchs liegt immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen.

Man kann den Satz 1 verschärfen: wir beweisen nämlich zuerst den

Satz 2. Der Wert einer in einen Kettenbruch entwickelten Zahl liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen, und zwar näher dem folgenden als dem vorhergehenden.

Beweis. Nach Fig. 17, S. 62 ging doch P_k dadurch aus P_{k-1} hervor, daß man durch P_{k-2} die Parallele zu OP_{k-1} zog und darauf OP_{k-1} so oft abtrug, daß man OP am nächsten kam. Hätte man nun OP_{k-1} (Fig. 20) einmal mehr abgetragen, so hätte man den Punkt P_k' erhalten, der auf der andern Seite von OP als P_k liegt, wobei der Punkt P den Wert $\frac{a}{b} = \frac{Z}{N}$ des Kettenbruchs darstellt, OP muß also die Strecke $P_k P_k'$ in einem *inneren* Punkt A treffen. Nun haben P_k und P_{k-1} von OP_k' gleichen Abstand, da $OP_{k-1} P_k' P_k$ ein Parallelogramm ist. OP geht aus OP_k dadurch hervor, daß man OP_k' gegen P_k hin dreht; *also hat P_k von OP einen kleineren Abstand als P_{k-1} von OP.* Diese Tatsache analytisch gefaßt gibt den Beweis des Satzes. OP hat zur Gleichung

$y:x = Z:N$ oder in der Normalform

$$\frac{xZ - yN}{\sqrt{Z^2 + N^2}} = 0\,.$$

P_k mit den Koordinaten N_k, Z_k hat von OP den Abstand (absolut genommen)

$$\left|\frac{N_k Z - Z_k N}{\sqrt{Z^2 + N^2}}\right|$$

und P_{k-1} hat von OP den Abstand

$$\left|\frac{N_{k-1} Z - Z_{k-1} N}{\sqrt{Z^2 + N^2}}\right|.$$

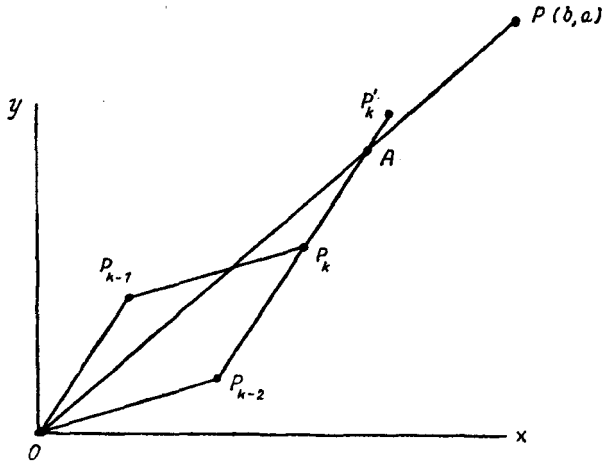

Fig. 20

Es ist also

$$\left|\frac{N_k Z - Z_k N}{\sqrt{Z^2 + N^2}}\right| < \left|\frac{N_{k-1} Z - Z_{k-1} N}{\sqrt{Z^2 + N^2}}\right| \quad \text{oder}$$

$$\left|\frac{Z}{N} - \frac{Z_k}{N_k}\right| < \frac{N_{k-1}}{N_k}\left|\frac{Z}{N} - \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}\right|$$

oder, da nach (1) $N_k > N_{k-1}$ ist, mit um so mehr Recht

$$\left|\frac{Z}{N} - \frac{Z_k}{N_k}\right| < \left|\frac{Z}{N} - \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}\right|.$$

Dies ist aber die Aussage in Satz 2.

Aus der Figur läßt sich noch mehr herausholen: wir beweisen mit ihrer Hilfe den

Satz 3. Es ist

$$\left|\frac{Z_k}{N_k} - \frac{Z}{N}\right| \leqq \frac{1}{N_k N_{k+1}}; \quad \left|\frac{Z_k}{N_k} - \frac{Z}{N}\right| > \frac{1}{N_k (N_k + N_{k+1})}. \qquad (4)$$

Beweis. Der Punkt A der Fig. 20 kann dadurch ermittelt werden, daß man auf der Parallelen zu OP_{k-1} durch P_k einen Bruchteil σ von OP_{k-1} abträgt. Die positive Zahl σ ist also < 1 und nur dann gleich Null, wenn P_{k-1} dem letzten Näherungsbruche entspricht, also P_k mit P zusammenfällt. Also hat A die Koordinaten

$$N_k + \sigma N_{k-1}, \quad Z_k + \sigma Z_{k-1}; \quad 0 \leqq \sigma < 1. \tag{5}$$

Da nun A auf OP liegt, so folgt

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z_k + \sigma Z_{k-1}}{N_k + \sigma N_{k-1}},$$

und daher

$$\frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} - \frac{Z}{N} = \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} - \frac{Z_k + \sigma Z_{k-1}}{N_k + \sigma N_{k-1}} = \frac{Z_{k-1} N_k - N_{k-1} Z_k}{N_{k-1}(N_k + \sigma N_{k-1})};$$

nach (2) ist aber der Zähler rechts absolut genommen gleich Eins, und es folgt

$$\left| \frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}} - \frac{Z}{N} \right| = \frac{1}{N_{k-1}(N_k + \sigma N_{k-1})},$$

oder, wenn statt $k-1$ die Zahl k gesetzt wird,

$$\left| \frac{Z_k}{N_k} - \frac{Z}{N} \right| = \frac{1}{N_k (N_{k+1} + \sigma N_k)}. \tag{6}$$

Hieraus folgt wegen des Wertes von σ in (5) die Behauptung (4); dabei gilt das Gleichheitszeichen in (4) nur dann, wenn $\frac{Z_k}{N_k}$ der letzte Näherungsbruch ist, also $\frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}} = \frac{Z}{N}$ also gleich dem Kettenbruch ist.

Satz 4. Die Differenz zwischen dem Werte eines Kettenbruchs $\frac{Z}{N}$ und dem Näherungsbruch $\frac{Z_k}{N_k}$ ist absolut genommen kleiner als die Einheit dividiert durch das Quadrat des Nenners des Näherungsbruchs:

$$\left| \frac{Z}{N} - \frac{Z_k}{N_k} \right| < \frac{1}{N_k^2}. \tag{7}$$

Dies folgt sofort aus (4), da nach (1) $N_{k+1} > N_k$ ist.

Da N_k in (7) um so größer ist, je größer k ist, so sieht man ein, daß die Näherungsbrüche sich immer mehr dem wahren Wert $\frac{Z}{N}$ des Kettenbruchs nähern, und daß die Annäherung eine vorzügliche ist, da nach (7) das reziproke Quadrat von N_k in Betracht kommt. Wie genau gerade die Näherungsbrüche den Kettenbruch approximieren, darüber gibt Aufschluß der

Satz 5. Wenn der Wert eines irreduziblen Bruches $\frac{A}{B}$ (d. h. eines Bruches, der nicht gekürzt werden kann) zwischen den Werten $\frac{Z_{k-1}}{N_{k-1}}$ und $\frac{Z_k}{N_k}$ von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen liegt, so ist sein Nenner B größer als der Nenner jedes der beiden Näherungsbrüche.

Beweis. Da $N_k > N_{k-1}$ ist, so lautet die Behauptung

$$B > N_k . \tag{8}$$

Das Parallelogramm $OP_kP'_kP_{k-1}$ in Fig. 20, das wir in Fig. 21 wiederholt haben, besitzt den Inhalt $= 1$ (absolut genommen). Nach § 12, Satz 2 kann also außer den Ecken des Parallelogramms kein Gitterpunkt auf dem Rande oder im Inneren des Parallelogramms liegen. Teilt man die Ebene in Maschen kongruent zu dem Parallelogramm, so muß der Gitterpunkt $L(B, A)$, der den Bruch $\frac{A}{B}$ darstellt, notwendig eine Ecke eines solchen Parallelogramms sein (Fig. 21). Außerdem muß nach der Voraussetzung des Satzes 5 OL in dem Winkelraum P_kOP_{k-1} liegen. Den Punkt L erhält man nun dadurch, daß man auf OP_k von O aus die Strecke OP_k α-mal ($\alpha \geqq 1$) abträgt bis R, und auf der Parallelen durch R zu OP_{k-1} die Strecke OP_{k-1} β-mal ($\beta \geqq 1$) abträgt bis L. Da P_k die Koordinaten (N_k, Z_k) hat, so hat R die Koordinaten $(\alpha N_k, \alpha Z_k)$. Die Abszisse B von L erhält man dadurch, daß man der Abszisse von R (αN_k) das β-fache der Abszisse von P_{k-1}, also βN_{k-1}, hinzufügt; Entsprechendes gilt für die Ordinaten. Es ist also

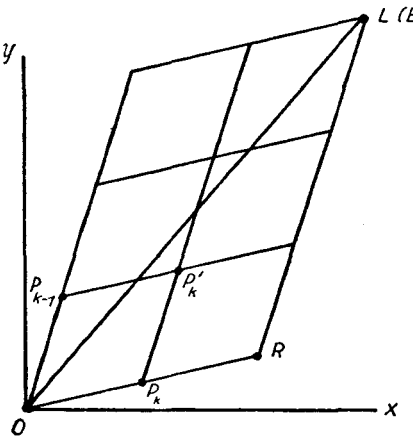

Fig. 21

$$\begin{aligned} A &= \alpha Z_k + \beta Z_{k-1} , \\ B &= \alpha N_k + \beta N_{k-1} . \end{aligned} \tag{9}$$

Da α und β positive ganze Zahlen sind und jede von ihnen mindestens gleich 1 ist, so ist damit der Satz bewiesen. Darüber hinaus hat man nach (9) den

Zusatz zu Satz 5. Der Nenner B ist mindestens gleich der Summe der Nenner der Näherungsbrüche $(N_k + N_{k-1})$.

Bemerkung 1. Die Zahlen α und β in (9) können als schiefwinklige Koordinaten von L in Fig. 21 gedeutet werden, wobei die Achsen OP_k und OP_{k-1} sind. Die Abszisse von L ist α, d. h. α Längeneinheiten, wo OP_k die Längeneinheit für die Abszissen ist, die Ordinate ist β, d. h. β Längeneinheiten, wo OP_{k-1} die Längeneinheit für die Ordinaten ist. Erteilt man in (9) α, β alle möglichen ganzzahligen positiven oder negativen (einschließlich der Null) Werte, so erhält man alle Ecken der oben genannten Parallelogramme, d. h. des neuen (schiefwinkligen)

Gitters. Jeder solchen Ecke entspricht nach (9) eine Ecke (B, A) des ursprünglichen quadratischen Gitters. Aber auch umgekehrt entspricht jedem Gitterpunkt (B, A) des quadratischen Gitters ein Gitterpunkt (α, β) des schiefwinkligen Gitters; denn wenn (9) nach α, β aufgelöst wird, entsteht als Nenner

$$Z_k N_{k-1} - Z_{k-1} N_k, \tag{10}$$

welcher nach (2) entweder den Wert $+1$ oder -1 besitzt. Die beiden Gitter sind also eineindeutig aufeinander bezogen: d. h. jeder Gitterpunkt des einen Gitters ist auch Gitterpunkt des anderen und umgekehrt. Man vergleiche hierzu auch die Erörterungen auf S. 61. Gleichungen von der Form (9), wo die „Determinante" (10) den Wert ± 1 hat, spielen in der Zahlentheorie (quadratische Formen) und in der Funktionentheorie (Modulfunktionen) eine bedeutende Rolle.

Aus dem Satz 5 ergibt sich, daß es keinen Bruch gibt, dessen Nenner zwischen den Nennern von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen liegt, und der dem wahren Wert näherkommen würde als einer der beiden Näherungsbrüche. Darin liegt der Wert der Näherungsbrüche begründet: will man einen Bruch durch einen Bruch mit kleineren Zahlen, als der Zähler und Nenner des gegebenen Bruches ist, mit bester Annäherung ausdrücken, so entwickle man den gegebenen Bruch in einen Kettenbruch und bilde die Näherungsbrüche; der Satz 4 gibt zugleich die Fehlergrenze an, wenn für den Bruch selbst ein Näherungsbruch gesetzt wird.

Bemerkung 2. Bisher war immer von Brüchen < 1 die Rede; ist aber der Bruch > 1, so ziehe man die Ganzen heraus und entwickle den Rest, der < 1 ist, in einem Kettenbruch.

Beispiel. Von der Zahl $\pi = 3{,}1415926$ sollen Näherungswerte berechnet werden. Verwandelt man

$\frac{1\,415\,926}{10\,000\,000}$ in einen Kettenbruch, so erhält man $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}\ldots}}$

und als Näherungsbrüche erhält man der Reihe nach

$$\frac{1}{7}, \quad \frac{15}{106}, \quad \frac{355}{113}, \ldots,$$

und für die Zahl π die Näherungswerte:

$$\frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}.$$

Der erste Wert ist der von *Archimedes*, der dritte der von *Adrianus Metius* (1571—1635). Der Fehler für den ersten Wert ist $< \frac{1}{49}$, der für den dritten $< \frac{1}{113^2} = \frac{1}{12769}$.

§ 15. Unendliche Kettenbrüche. Rationale und irrationale Zahlen

In § 14 haben wir gesehen, daß jede positive *rationale* Zahl, die kleiner als 1 ist, d. h. jeder echte Bruch sich in einen Kettenbruch mit einer *endlichen* Zahl von Teilnennern verwandeln läßt. Liegt eine positive *rationale* Zahl vor, die größer als 1 ist, so kann diese dargestellt werden als Summe einer ganzen Zahl vermehrt um einen Kettenbruch mit *endlicher* Gliederzahl. Auch das Umgekehrte ist richtig, daß nämlich jede Zahl, die sich als Summe einer ganzen Zahl und eines *endlichen* Kettenbruchs darstellen läßt, notwendig *rational* ist; denn jeder Kettenbruch kann in einen echten Bruch verwandelt werden. Diese Darstellung ist also geradezu charakteristisch für eine rationale Zahl. Was ist nun der Fall, wenn man versucht, eine irrationale Zahl, z. B. $\sqrt{2}$, in einen Kettenbruch zu verwandeln? Daß man jede positive *irrationale* Zahl ebenfalls in einen Kettenbruch verwandeln kann, möge an dem Beispiel von $\sqrt{2}$ gezeigt werden.

Da $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegt, so ist $\sqrt{2}-1$ eine Zahl <1; diese wollen wir in einen Kettenbruch verwandeln. Es ist

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}\,;\quad \frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1=2+(\sqrt{2}-1)$$

Setzt man diesen Wert von $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ in die erste Gleichung ein, so folgt

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} \tag{1}$$

und jetzt

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}},$$

also

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}} \tag{2}$$

wobei der Kettenbruch ins *Unendliche* fortzusetzen ist, vgl auch S. 91. Dieses Ergebnis war vorauszusehen, nämlich daß, wenn $\sqrt{2}$ sich in einen Kettenbruch verwandeln läßt, der Kettenbruch nicht abreißen kann; denn hätte er nur eine endliche Gliederzahl, so wäre ja $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, was nicht der Fall ist. Daß der Kettenbruch *periodisch* ist, d. h. daß die Teilnenner sich wiederholen, ist eine Besonderheit, die bei Wurzeln von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten stets auftritt, auf die wir aber hier nicht eingehen. Auf ähnlichem Wege wie bei dem Beispiel kann jede irrationale Zahl in einen Kettenbruch verwandelt werden; von ihm kann sicher gesagt werden, daß er nicht abbricht, da ja sonst die Zahl rational wäre.

Es entsteht nun aber die Frage: *Hat ein solcher unendlicher Kettenbruch überhaupt einen Sinn?* Diese Frage ist durchaus berechtigt, da in den früheren Paragraphen immer vorausgesetzt war, daß der Kettenbruch eine endliche Zahl von Teilnennern besitzt.

Es sei also der „unendliche" Kettenbruch

$$\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots}}} \tag{3}$$

gegeben, wo die in unendlicher Zahl auftretenden Teilnenner $q_1, q_2, q_3 \dots$ positive ganze Zahlen sind. Wir betrachten wie früher die Brüche

$$\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{q_1},\quad \frac{Z_2}{N_2}=\frac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},\quad \frac{Z_3}{N_3}=\frac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}},\quad \dots,\quad \frac{Z_{2\nu}}{N_{2\nu}},\quad \frac{Z_{2\nu+1}}{N_{2\nu+1}},\quad \dots \tag{4}$$

die wir wieder als *Näherungsbrüche* bezeichnen, ihre Zahl ist unendlich groß. Jeder der Näherungsbrüche ist ein *endlicher* Kettenbruch und daher rational; nach den früher gegebenen Vorschriften kann jeder in einen echten Bruch verwandelt werden. Da die in (4) angeschriebenen Näherungsbrüche lauter Näherungsbrüche des *endlichen* Kettenbruchs $\frac{Z_{2\nu+2}}{N_{2\nu+2}}$ sind, so hat man nach § 14, (3)

$$\frac{Z_1}{N_1}>\frac{Z_3}{N_3}>\frac{Z_5}{N_5}>\dots>\frac{Z_{2\nu+1}}{N_{2\nu+1}}>\dots>\frac{Z_{2\nu}}{N_{2\nu}}>\dots>\frac{Z_4}{N_4}>\frac{Z_2}{N_2}, \tag{5}$$

und nach § 14, (7)

$$\left|\frac{Z_{2\nu+1}}{N_{2\nu+1}}-\frac{Z_{2\nu}}{N_{2\nu}}\right|<\frac{1}{N_{2\nu}^2}, \tag{6}$$

da ja $\frac{Z_{2\nu}}{N_{2\nu}}$ ein Näherungsbruch des *endlichen* Kettenbruchs $\frac{Z_{2\nu+1}}{N_{2\nu+1}}$ ist; (5) und (6) gelten für jedes positive ganzzahlige ν. Da nun $N_{2\nu}$ mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst, so kann durch passende Wahl von ν die rechte Seite von (6) beliebig klein gemacht werden. Durch (5) ist nach S. 6 eine Intervallschachtelung dargestellt, die eine bestimmte, wie wir wissen, *irrationale Zahl* $\frac{Z}{N}$ *definiert*. Man hat also

$$\frac{Z}{N}=\lim_{n\to\infty}\frac{Z_n}{N_n}; \tag{7}$$

diesen Grenzwert nennt man den Wert des unendlichen Kettenbruchs (3) und schreibt

$$\frac{Z}{N}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots}}} \tag{8}$$

so daß man eine ähnliche Darstellung wie bei einem unendlichen Dezi-

malbruch hat. Wegen der Gleichung (7) nennt man den unendlichen Kettenbruch (3) konvergent. Man hat also den

Satz. Jeder unendliche Kettenbruch von der Form (3) ist konvergent und irrational.

Die rationalen Näherungsbrüche (5) geben um so bessere Annäherungen an die irrationale Zahl $\frac{Z}{N}$, je größer ν ist. Da $\frac{Z}{N}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen liegt, so ist

$$\left|\frac{Z}{N}-\frac{Z_n}{N_n}\right|<\left|\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}-\frac{Z_n}{N_n}\right|,$$

also nach (6)

$$\left|\frac{Z}{N}-\frac{Z_n}{N_n}\right|<\frac{1}{N_n^2}, \tag{9}$$

woraus hervorgeht, wie außerordentlich gut die Näherungsbrüche die irrationale Zahl $\frac{Z}{N}$ approximieren.

Beispiel. Die Näherungsbrüche des Kettenbruchs für $\sqrt{2}$.

Nach dem Schema auf S. 67 erhält man für den Kettenbruch (2) das Schema

			2	2	2	2	2	2	2	2
Z	1	0	1	2	5	12	29	70	169	408
N	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985

Es ist nun

$$\frac{408}{985}=0{,}4142131\ldots \quad \text{also} \quad \sqrt{2}=1+\frac{408}{985}=1.4142131\ldots \tag{10}$$

Der bei dem Ansatz (10) begangene Fehler ist nach (9) kleiner als $1:985^2=0{,}0000010$. Es ist also $\sqrt{2}=1{,}41421$ bis auf fünf Dezimalstellen genau.

§ 16. Die transzendenten Zahlen von Liouville

Liouville[1]) hat als erster die Existenz transzendenter Zahlen nachgewiesen. In schöner und einfacher Weise benutzt er hierzu die Kettenbrüche. Ehe wir auf diese interessante Anwendung der Kettenbruchlehre eingehen, wollen wir angeben, was man unter transzendenten Zahlen versteht. Jede Zahl, die einer algebraischen Gleichung

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

mit *ganzzahligen* Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ genügt, heißt eine *algebraische* Zahl: so sind die Zahlen

$$\sqrt[3]{3},\quad \sqrt{-2},\quad i$$

[1]) Comptes rendus vol. 18 (1844), p. 883 und 910, und Journ. de Liouville, vol. 16 (1851), pg. 133.

algebraische Zahlen, da sie der Reihe nach den Gleichungen

$$x^3 - 3 = 0, \qquad x^2 + 2 = 0, \qquad x^2 + 1 = 0$$

genügen. Auch jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen sind, ist algebraisch, da sie der Gleichung $qx - p = 0$ genügt. Wir fragen nun: gibt es reelle positive Zahlen, die keiner algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügen? Eine solche Zahl, wenn sie existiert, heißt *transzendent*. Eine transzendente Zahl ist immer irrational. *Liouville* zeigte, daß, wenn eine positive reelle irrationale algebraische Zahl in einen Kettenbruch entwickelt wird, der natürlich unendlich viele Teilnenner besitzt, die Eigentümlichkeit hat, daß seine Teilnenner nicht beliebig hoch anwachsen können.

Es sei also x_1 eine reelle algebraische Zahl und zugleich positiv und irrational und etwa Wurzel der Gleichung (1). Wir können auch voraussetzen, daß $x_1 < 1$ ist, andernfalls würden wir $1 : x_1$ betrachten, welche Zahl Wurzel der Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

wäre, also auch algebraisch, reell, positiv und irrational. Weiter setzen wir voraus, daß die Gleichung (1) lauter verschiedene Wurzeln besitze; anderfalls könnte die linke Seite von (1) mit dem größten gemeinsamen Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$ dividiert werden, und man erhielte eine andere algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, der die Zahl x_1 auch genügt, und diese hätte jetzt lauter *verschiedene* Wurzeln.

Nun möge die Kettenbruchentwicklung von x_1 lauten

$$x_1 = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}} \tag{2}$$

Dafür kann man auch

$$x_1 = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots + \cfrac{1}{q_k + r_k}}} \tag{3}$$

schreiben, wo die positive Zahl r_k durch

$$r_k = \cfrac{1}{q_{k+1} + \cfrac{1}{q_{k+2} \ldots}}, \qquad \frac{1}{r_k} = q_{k+1} + \cfrac{1}{q_{k+2} + \cfrac{1}{q_{k+3} \ldots}} \tag{4}$$

definiert ist. q_{k+1} ist also die größte ganze Zahl, die in $\frac{1}{r_k}$ enthalten ist.

Nach § 14, (1) war

$$\frac{Z_k}{N_k} = \frac{q_k Z_{k-1} + Z_{k-2}}{q_k N_{k-1} + N_{k-2}}; \tag{5}$$

setzt man hier entsprechend (3) für q_k die Größe $q_k + r_k$, so gibt die rechte Seite von (5) die Zahl x_1. Es ist somit

$$x_1 = \frac{(q_k + r_k) Z_{k-1} + Z_{k-2}}{(q_k + r_k) N_{k-1} + N_{k-2}} = \frac{Z_k + r_k Z_{k-1}}{N_k + r_k N_{k-1}},$$

wieder mit Benutzung von § 14, (1) und jetzt

$$\frac{Z_k}{N_k} - x_1 = \frac{Z_k}{N_k} - \frac{Z_k + r_k Z_{k-1}}{N_k + r_k N_{k-1}} = \frac{r_k (Z_k N_{k-1} - Z_{k-1} N_k)}{N_k (N_k + r_k N_{k-1})} = \frac{r_k (-1)^{k+1}}{N_k (N_k + r_k N_{k-1})},$$

wobei für die letzte Umformung § 14, (2) benutzt wurde. Es ist also

$$\left| \frac{Z_k}{N_k} - x_1 \right| = \frac{r_k}{N_k (N_k + r_k N_{k-1})}. \tag{6}$$

Sind außer x_1 die anderen Wurzeln von (1) $x_2, x_3, \ldots, x_n$, die also alle voneinander verschieden sind, so hat man

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

also

$$\begin{aligned} f\left(\frac{Z_k}{N_k}\right) &= a_0 \left(\frac{Z_k}{N_k} - x_1\right)\left(\frac{Z_k}{N_k} - x_2\right) \ldots \left(\frac{Z_k}{N_k} - x_n\right) \\ &= \frac{a_0 Z_k^n + a_1 Z_k^{n-1} N_k + \ldots + a_n N_k^n}{N_k^n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Da im Zähler rechts lauter ganze Zahlen stehen, so kann man statt (7) schreiben

$$a_0 \left(\frac{Z_k}{N_k} - x_1\right)\left(\frac{Z_k}{N_k} - x_2\right) \ldots \left(\frac{Z_k}{N_k} - x_n\right) = \frac{A}{N_k^n}, \tag{8}$$

wo A eine *ganze* Zahl ist, von der wir zeigen, daß sie von einem gewissen k ab absolut genommen mindestens gleich 1 ist, also nie Null sein kann. Denn, wenn k wächst, nähert sich $\frac{Z_k}{N_k}$ der Grenze x_1; weil nun die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ voneinander verschieden sind, so wird von einem gewissen k ab stets

$$\frac{Z_k}{N_k} - x_\sigma \qquad \sigma = 1, 2, \ldots n$$

von Null verschieden und absolut genommen kleiner als eine gewisse endliche positive Zahl sein. Daher ist von diesem Wert von k ab die ganze Zahl A in (8) stets von Null verschieden, also absolut genommen mindestens gleich 1. Weiter ist

$$\left| a_0 \left(\frac{Z_k}{N_k} - x_2\right)\left(\frac{Z_k}{N_k} - x_3\right) \ldots \left(\frac{Z_k}{N_k} - x_n\right) \right|$$

stets kleiner als eine gewisse endliche positive Zahl l. Darum ist nach (8) von jenem k ab

$$\left| \left(\frac{Z_k}{N_k} - x_1\right) l \right| > \frac{1}{N_k^n}, \quad \text{oder}$$

$$\left| \frac{Z_k}{N_k} - x_1 \right| > \frac{1}{l N_k^n}. \tag{9}$$

Nach (6) hat man also

$$\frac{r_k}{N_k (N_k + r_k N_{k-1})} > \frac{1}{l N_k^n}, \text{ oder } \frac{N_k + r_k N_{k-1}}{r_k} < l N_k^{n-1}, \text{ oder}$$

$$\frac{N_k}{r_k} + N_{k-1} < l N_k^{n-1}, \text{ und } \frac{N_k}{r_k} < l N_k^{n-1},$$

und

$$\frac{1}{r_k} < l N_k^{n-2}. \tag{10}$$

Nun war q_{k+1} die größte in $\frac{1}{r_k}$ enthaltene ganze Zahl, d. h. es ist

$$q_{k+1} < \frac{1}{r_k}, \tag{11}$$

wie auch aus (4) unmittelbar zu sehen. Aus (10) und (11) folgt schließlich

$$\boxed{q_{k+1} < l\, N_k^{n-2}.} \tag{12}$$

Dies ist die wichtige Liouvillesche Ungleichung. Sie bestätigt das schon oben Gesagte, daß nämlich in der Kettenbruchentwicklung der algebraischen Zahl x_1 von einem gewissen k ab die Teilnenner q_{k+1} usw. nicht beliebig stark anwachsen können.

Die *Liouville*sche Bedingung (12) ist dafür, daß eine Zahl algebraisch ist, *notwendig*; nichts berechtigt uns aber anzunehmen, daß eine Zahl, für die (12) gilt, algebraisch sei. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Transzendenz einer Zahl kennt man nicht. Den algebraischen oder transzendenten Charakter einer gegebenen Zahl nachzuweisen, gehört zu den schwierigsten Problemen der Mathematik. Es ist bekannt, wieviel Scharfsinn erforderlich war, die Transzendenz von e (*Hermite* 1873) und π (*Lindemann* 1882) zu beweisen.

Aber jedenfalls kann man sagen, daß eine Zahl, für die von einem gewissen k ab (12) niemals erfüllt ist, transzendent ist. Auf Grund dieses Gedankens ist es leicht, einen Kettenbruch herzustellen, der eine transzendente Zahl definiert. Man braucht z. B. nur

$$q_{k+1} = N_k^{k-1} \tag{13}$$

zu setzen; denn welches auch die positiven (endlichen) Zahlen l und n in (12) sind, so kann man k so groß wählen, daß von ihm ab stets

$$k > n, \qquad N_k > l,$$

also auch

$$N_k^{k-2} > N_k^{n-2}$$

ist. Da nun nach (13)

$$q_{k+1} = N_k \cdot N_k^{k-2}$$

ist, so folgt

$$q_{k+1} > l\, N_k^{n-2}, \tag{14}$$

was also von jenem k ab stets gilt. Die durch (13) definierte Zahl ist also transzendent. Man sieht auch, daß die Teilnenner am Anfang ganz willkürlich gewählt werden können; wenn nur von einem gewissen beliebig groß zu wählenden k an (13) gilt, so ist die Zahl sicher transzendent. Würde man statt (13)

$$q_{k+1} > N_k^{k-1} \tag{15}$$

wählen, so wäre die entsprechende Zahl aus denselben Gründen transzendent. Man hat also den

Satz von Liouville. Es gibt unendlich viele transzendente Zahlen.

Ja man macht sich leicht klar, daß in einem noch so kleinen Intervall der Zahlengeraden unendlich viele Punkte liegen, deren Abszissen transzendente Zahlen sind. Man drückt dies so aus, daß man sagt: *Die transzendenten Punkte liegen überall dicht.*

§ 17. Das Messen. Der Proportionallehrsatz. Flächenmessung

Die Euklidische Geometrie, so wie sie im elementaren Unterricht behandelt zu werden pflegt, zerfällt in zwei scharf geschiedene Teile. In dem ersten werden die Strecken, Winkel und Flächen nur qualitativ betrachtet, während im zweiten Teile die *Maßzahlen* der Strecken, Winkel und Flächen eine Rolle spielen, die man erhält, wenn dieselben mit einer Einheitsstrecke, einem Einheitswinkel, einer Einheitsfläche gemessen werden. Durch das Messen wird ein neues Moment in die Geometrie eingeführt, das Lehrern und Schülern recht erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Um bei den Strecken stehen zu bleiben, so handelt es sich um die grundlegende Frage: Kommt jeder Strecke in Beziehung auf eine Maßeinheit eine bestimmte Maßzahl zu, und gehört zu jeder Maßzahl eine bestimmte Strecke?

Das Messen ist nun eine recht verwickelte Operation, deren Schwierigkeit schon *Euklid* in ihrer ganzen Tiefe erfaßt hat. Es ist darum ein großes Unrecht, wenn versucht wird, ein Problem, das durchaus nicht einfach ist, durch hinterlistige Unterschlagungen dem Schüler mundgerecht zu machen. Ich führe die wenig schmeichelhafte Bemerkung von *G. Hessenberg* in seiner Tübinger Antrittsvorlesung „vom Sinn der Zahlen" (Tübingen 1922, S. 13) an: „Wer von Ihnen an seine Schulzeit und darin an das Kapitel der Proportionenlehre zurückdenkt, der wird sich wahrscheinlich noch entsinnen, daß dort etwas nicht in Ordnung war. Mindestens neun Zehntel aller Lehrer pflegen ja an dieser Stelle zu ‚mogeln'. *Wie viele* unter diesen es tun, weil sie die Sache selber nicht verstanden haben, und *wie wenige* des übrigbleibenden Zehntels mit ihrem Bestreben, den schwierigen Gegenstand dem Schüler menschlich näherzubringen, Erfolg haben, das wollen wir dahingestellt sein lassen." Im folgenden soll nun versucht werden, zu zeigen, wie dem Schüler die Schwierigkeit des Problems des Messens eröffnet, und wie diese Schwierigkeit überwunden werden kann.

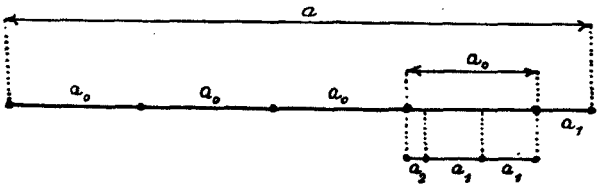

Fig. 22

Soll die Strecke a (Fig. 22) mit der Strecke a_0 (*Einheitsstrecke, Einheitsmaßstab*) gemessen werden, so will man erfahren, wie oft a_0 auf a nacheinander abgetragen werden kann. Dabei benutzt man stillschweigend ein *Axiom,* das *Euklid* als solches nicht zum Bewußtsein kam, das aber in der neueren Grundlagenforschung der Geometrie eine wichtige Rolle spielt. Es ist das sogenannte *Archimedische Axiom,* das fordert, daß man bei wiederholtem Abtragen von a_0 auf a wirklich einmal über den Endpunkt von a, d. h. nach einer *endlichen* Anzahl von Schritten hinauskommt. Hat man nun durch q_0-maliges Auftragen gerade den Endpunkt der zu messenden Strecke a erreicht, so hat man $a = q_0\, a_0$ und sagt: Die Maßzahl der Strecke a sei q_0, d. h. a besteht aus q_0 Maßeinheiten a_0. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß nach q_0-maliger Abtragung der Strecke a_0 auf a ein Reststückchen $a_1 < a_0$ übrigbleibt, so daß also

$$a = q_0\, a_0 + a_1\,, \qquad a_1 < a_0 \tag{1}$$

ist. Jetzt trage man das Reststück a_1 auf a_0 ab (s. Fig. 22). Nach q_1-maligem Abtragen möge der Rest a_2 übrigbleiben, dann hat man

$$a_0 = q_1 a_1 + a_2\,, \qquad a_2 < a_1\,. \tag{2}$$

Ist $a_2 = 0$, also $a_0 = q_1 a_1$, so folgt aus $a_1 = \frac{a_0}{q_1}$ nach Eintragen in (1)

$$a = \left(q_0 + \frac{1}{q_1}\right) a_0\,,$$

und die Maßzahl von a ist die Zahl $q_0 + \frac{1}{q_1}$. Die Strecken a und a_0 heißen *kommensurabel,* weil es eine Strecke, nämlich a_1 gibt, die sowohl in a wie in a_0 aufgeht; denn trägt man die Strecke a_1 in der Fig. 22 von rechts her nach links wiederholt ab, so geht sie in jeder der Strecken a_0, in die a zerfallen ist, und daher auch in a auf.

Ist $a_2 \neq 0$, so trage man jetzt a_2 auf a_1 ab; man erhält

$$a_1 = q_2 a_2 + a_3\,, \qquad a_3 < a_2\,. \tag{3}$$

Ist $a_3 = 0$, so ist $a_2 = \frac{a_1}{q_2}$, und nach (2) $a_0 = \left(q_1 + \frac{1}{q_2}\right) a_1$, oder

$$a_1 = \frac{a_0}{q_1 + \frac{1}{q_2}}\,,$$

und endlich nach (1)

$$a = \left(q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}\right) a_0\,,$$

wo der Faktor von a_0 jetzt die Maßzahl von a ist. Wie man sieht, kommt man zu den Kettenbrüchen. Die Strecken a und a_0 sind wieder kommensurabel; denn a_2 geht in beiden Strecken auf. Wegen $a_3 = 0$ ist nämlich nach (3) a_1 ein ganzzahliges Vielfaches von a_2, jetzt nach (2) a_0 ein ganzzahliges Vielfaches von a_2, und endlich nach (1) auch a ein ganzzahliges Vielfaches von a_2.

Ist aber $a_3 \neq 0$, so trage man a_3 auf a_2 ab, und man erhält, wenn man so fortfährt, die Kette von Gleichungen

$$\begin{aligned}
a &= q_0 a_0 + a_1 \quad , \quad a_1 < a_0 , && (1)\\
a_0 &= q_1 a_1 + a_2 \quad , \quad a_2 < a_1 , && (2)\\
a_1 &= q_2 a_2 + a_3 \quad , \quad a_3 < a_2 , && (3)\\
a_2 &= q_3 a_3 + a_4 \quad , \quad a_4 < a_3 , && (4)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \quad \cdots\cdots\cdots && \\
a_{k-2} &= q_{k-1} a_{k-1} + a_k , \quad a_k < a_{k-1} , && (5)\\
a_{k-1} &= q_k a_k + a_{k+1} , \quad a_{k+1} < a_k , && (6)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \quad \cdots\cdots\cdots &&
\end{aligned} \qquad (I)$$

unter Wiederholung der Gleichungen (1)—(3). Wäre $a_k \neq 0$, aber $a_{k+1} = 0$, so würde man wie vorher erhalten

$$a = \left(q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 \cdots \cfrac{}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}}}}} \right) a_0 , \qquad (7)$$

und der Kettenbruch in der Klammer wäre die Maßzahl von a; a_k geht in alle Strecken $a_{k-1}, a_{k-2} \ldots a_1, a, a_0$ auf, d. h. a und a_0 sind kommensurabel.

Wenn nun aber die Kette von Gleichungen nicht abbricht, also niemals ein $a_k = 0$ wird, was ist dann die Maßzahl von a? Aus (6) folgt dann

$$a_{k-1} > q_k a_k , \quad a_{k-1} < (q_k + 1) a_k , \quad \text{oder}$$

$$a_k < \frac{a_{k-1}}{q_k} , \qquad a_k > \frac{a_{k-1}}{q_k + 1} ,$$

und darum nach (5)

$$a_{k-2} < \left(q_{k-1} + \frac{1}{q_k} \right) a_{k-1} , \quad a_{k-2} > \left(q_{k-1} + \frac{1}{q_k + 1} \right) a_{k-1} ,$$

und jetzt

$$a_{k-1} > \left(\frac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}} \right) a_{k-2} , \quad a_{k-1} < \left(\frac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k + 1}} \right) a_{k-2} . \qquad (8)$$

Benutzt man die vor (5) stehende Gleichung

$$a_{k-2} = q_{k-2} a_{k-2} + a_{k-1} ,$$

so folgt

$$a_{k-2} > \left(q_{k-2} + \frac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}} \right) a_{k-2} , \quad a_{k-2} < \left(q_{k-2} + \frac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k + 1}} \right) a_{k-2}$$

und

$$a_{k-2} < \left(\frac{1}{q_{k-2} + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}}} \right) a_{k-2} , \quad a_{k-2} > \left(\frac{1}{q_{k-2} + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k + 1}}} \right) a_{k-2} . \qquad (9)$$

Schließlich folgt

$$a > \left(q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 \cdots + \cfrac{1}{q_k}}}\right) a_0, \quad a < \left(q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 \cdots + \cfrac{1}{q_k + 1}}}\right) a_0, \tag{10}$$

wo evtl. die Ungleichheitszeichen (vgl. (8) und (9)) beidemal umgedreht werden müssen, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Nun ist leicht einzusehen, daß die rechts in (10) stehenden Strecken bei passender Wahl von k um beliebig wenig sich unterscheiden; da genügt es zu zeigen, daß die Kettenbrüche in (10), die wir mit K und K_1 bezeichnen, es tun. K ist aber ein Näherungsbruch von K_1, wie man sofort sieht, wenn das Ende von K_1 als $\cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{1}}$ geschrieben wird. Nach § 14, (7) ist also

$$\left| K - K_1 \right| < \frac{1}{N_k^2},$$

wo N_k der Nenner der rationalen Zahl K ist. Da nun mit wachsendem k der Nenner N_k über alle Grenzen wächst, so ist die Behauptung bewiesen. K und K_1 streben nun beide mit wachsendem k dem Werte des unendlichen Kettenbruchs zu, und es ist daher

$$a = \left(q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}}\right) a_0, \tag{11}$$

wo nun die Klammer, *der unendliche Kettenbruch, die Maßzahl* von a ist: *sie ist irrational* (§ 15). In diesem Fall sind die Strecken a und a_0 *inkommensurabel*, d. h. es gibt keine Strecke e, die in a und a_0 aufgeht; denn e müßte nach (1) auch in a_1, dann nach (2) auch in a_2 usw., d. h. in jedem a_k aufgehen; dies ist aber nicht möglich, da die Strecken a_k mit wachsendem k unter jede noch so kleine Strecke, z. B. unter e heruntersinken. Daß das Letztere der Fall ist, läßt sich leicht einsehen: Aus (3), (4), (5), ... folgt nämlich, weil $q_k \geqq 1$, und $a_k < a_{k-1}$ ist,

$$a_1 > 2a_3, \quad a_2 > 2a_4, \quad a_3 > 2a_5, \ldots \text{ oder}$$

$$a_3 < \frac{a_1}{2}, \quad a_4 < \frac{a_2}{2}, \quad a_5 < \frac{a_3}{2}, \ldots$$

Hieraus folgt

$$a_3 < \frac{a_1}{2}, \qquad a_4 < a_3 < \frac{a_1}{2},$$

$$a_5 < \frac{a_3}{2} < \frac{a_1}{2^2}, \qquad a_6 < a_5 < \frac{a_1}{2^2},$$

$$a_7 < \frac{a_5}{2} < \frac{a_1}{2^3}, \qquad a_8 < a_7 < \frac{a_1}{2^3},$$

und allgemein

$$a_{2k+1} < \frac{a_1}{2^k}, \qquad a_{2k+2} < \frac{a_1}{2^k}.$$

Daß es inkommensurable Strecken gibt, ist unmittelbar klar; denn ist

$$a = a_0\sqrt{2},$$

so sind nach (11) a und a_0 solche Strecken, da der Kettenbruch für $\sqrt{2}$ unendlich ist (vgl. S. 78). Dies läßt sich auch leicht geometrisch einsehen:

Zu diesem Zwecke *soll die Hypotenuse a* (Fig. 23) *eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete a_0 gemessen werden.* Wir fragen also: Wie viel mal größer ist a als a_0? Man hat also jetzt a_0 auf a abzutragen. Dazu halbiere man durch BE den Winkel ABC und fälle von E auf BC das Lot ED. Da nun $\triangle ABE \cong DBE$ ist, so folgt

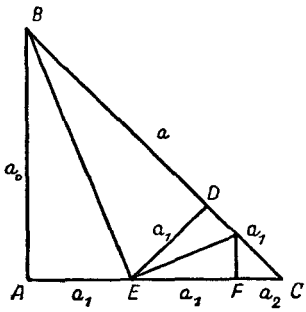

Fig. 23

$$BD = BA = a_0, \quad AE = ED = DC;$$

das letztere, weil das Dreieck EDC gleichschenklig rechtwinklig ist. Aus diesem Dreieck ergibt sich $DC < EC$, also

$$DC < AC = a_0; \quad DC = DE = EA$$

ist somit das Reststückchen a_1 in (1). *Die Kathete a_0 eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks läßt sich also nur einmal auf der Hypotenuse a abtragen; es bleibt dann ein Rest, der kleiner als die Kathete ist.* Es ist also

$$a = 1 \cdot a_0 + a_1, \qquad a_1 < a_0. \tag{12}$$

Jetzt ist a_1 auf $a_0 = AC$ abzutragen; einmal ist a_1 auf AC schon abgetragen bis E. Die Kathete $DE = a_1$ geht jetzt in EC noch einmal herein bis F, und es bleibt $FC = a_2$ übrig. Also ist

$$a_0 = 2a_1 + a_2, \qquad a_2 < a_1. \tag{13}$$

Nun ist a_2 auf a_1 abzutragen. Dies ist aber in verkleinertem Maßstabe dasselbe wie vorher bei a_1 und a_0. Es ist daher

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_2 + a_3, & a_3 &< a_2, \\ a_2 &= 2a_3 + a_4, & a_4 &< a_3, \\ a_3 &= 2a_4 + a_5, & a_5 &< a_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{aligned} \tag{14}$$

ohne daß jemals eine der Größen a_k verschwinden würde. Daraus folgt:

Die Seite und Diagonale eines Quadrats sind inkommensurabel.

Dieses klassische Beispiel bringen wohl die meisten Lehrbücher, aber nur, um die *Existenz* inkommensurabler Strecken nachzuweisen, sie *unterlassen* es aber, in dem Beispiel den Algorithmus (13), (14), und im allgemeinen den durch (7) dargestellten Algorithmus so auszubeuten, daß man auch wirklich zur *Maßzahl* gelangt, wie dies in (11) geschehen

ist. Für das Beispiel ergibt sich sofort durch Vergleichen von (13) und (14) mit (I) und (11)

$$a = \left(1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}\right) a_0 , \tag{15}$$

wo der Kettenbruch nach S. 76 den Wert $\sqrt{2}$ hat. Dies sieht man auch leicht direkt ein: man setze

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}} \quad ;$$

dann folgt sofort

$$x = \frac{1}{2+x}, \quad x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x = -1 + \sqrt{2}$$

wo die Wurzel positiv auszuziehen war, damit x positiv wird. Die Klammer in (15) hat also in der Tat den Wert $\sqrt{2}$, und es ist jetzt

$$a = a_0 \sqrt{2} . \tag{16}$$

Jetzt ist aus der schönen geometrischen Betrachtung alles herausgeholt.

Der Euklidische Algorithmus (I)

Der Algorithmus (I) ist ein für die Mathematik hervorragend wichtiger: er wird als *Euklidischer Algorithmus* bezeichnet und ist so einfach und schön, daß er es wohl verdient, auch in der Schule behandelt zu werden.

Algebraisch gedeutet, stellt der Algorithmus (I) das Verfahren dar, wie zu zwei Zahlen der größte gemeinsame Teiler gefunden werden kann, die sog. *Staffelrechnung,* der wir schon S. 69 begegnet sind. In den obigen Gleichungen mögen für den Augenblick a und a_0 nicht zwei Strecken, sondern zwei ganze positive Zahlen ($a > a_0$) bedeuten. Durch Division (geometrisch: wiederholtes Abtragen) stellt man fest, wie oft a_0 in a enthalten ist: sagen wir q_0-mal und die ganze Zahl a_1 sei der Rest. Man hat so (1). Mit der Restzahl a_1 dividiert man jetzt in den ersten Divisor a_0; a_1 gehe in a_0 q_1-mal und lasse als Rest die ganze Zahl a_2. Man hat so (2). Mit dem neuen Rest a_2 dividiert man wieder in den letzten Divisor a_1 und erhält (3) usw., kurz den Algorithmus (I). Da die ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3 immer kleiner werden, so muß einmal eine der Zahlen a_k, sagen wir z. B. a_6, gleich Null sein; dann hat man nach (I)

$$\begin{aligned}
a &= q_0 a_0 + a_1 , \\
a_0 &= q_1 a_1 + a_2 , \\
a_1 &= q_2 a_2 + a_3 , \\
a_2 &= q_3 a_3 + a_4 , \\
a_3 &= q_4 a_4 + a_5 , \\
a_4 &= q_5 a_5 .
\end{aligned} \tag{17}$$

Nach der letzten Gleichung ist a_5 Teiler von a_4, dann nach der vorletzten Gleichung von a_3, dann von a_2, dann von a_1, dann von a_0 und endlich von a. Die ganze Zahl a_5 ist also sicher Teiler von a_0 und a; (oben als Strecke gedeutet ging a_5 in den Strecken a und a_0 auf). Es ist aber auch a_5 der *größte* Teiler von a und a_0. Ist nämlich δ der größte Teiler von a und a_0, so muß δ nach der ersten Gleichung (17) in a_1, nach der zweiten in a_2, dann in a_3, a_4 und nach der vorletzten Gleichung in a_5 aufgehen, d. h. δ ist gleich a_5. Ist $a_5 = 1$, so ist 1 der größte Teiler von a und a_0, sie sind relativ prim. Aus (17) folgt wie oben in (7)

$$\frac{a}{a_0} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5}}}}}.$$

Wir sind also genau auf das S. 69 erläuterte Verfahren gekommen, eine rationale Zahl in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Fassen wir das Hauptergebnis dieses Paragraphen zusammen in den

Satz. Jeder Strecke a kommt in Beziehung auf eine beliebige Maßeinheit a_0 ein Maß zu, das durch einen Kettenbruch nach dem Euklidischen Algorithmus zu berechnen ist. Ist der Kettenbruch ein endlicher, so ist die Maßzahl rational und die Strecken a, a_0 sind kommensurabel. Im andern Falle ist die Maßzahl irrational und die Strecken sind inkommensurabel.

Wir wenden uns nun der zweiten eingangs erwähnten Frage zu: Läßt sich jeder Maßzahl M — mag sie rational oder irrational sein — eine bestimmte Strecke zuordnen, die in bezug auf die Maßeinheit diese Maßzahl besitzt? Zu diesem Zweck entwickle man M in einen Kettenbruch und berechne seine Näherungsbrüche $M_1, M_2, M_3, \ldots$, die ja rational sind, und trage sie auf der Zahlengeraden von O aus ab bis $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Nach § 14, (3) ist dann

$$OP_1 > OP_3 > OP_5 > \ldots > \ldots > OP_6 > OP_4 > OP_2$$

dabei werden die Strecken P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 ... immer kleiner und sinken schließlich unter jeden noch so kleinen Bruchteil der Einheitsstrecke herab. Man ist daher gern bereit, der Anschauung zu entnehmen, daß die Punkte $P_1, P_3, P_5, \ldots$ nach links hin, die Punkte $P_2, P_4, P_6, \ldots$ nach rechts hin einem und demselben Grenzpunkt P (Verdichtungsstelle, Häufungspunkt) zustreben. Diesem Grenzpunkt P wäre dann die Maßzahl M zugeordnet. Dennoch liegt hier, so klar diese Tatsache der Anschauung zu sein scheint, ein *Axiom* vor, wie zuerst *Cantor* in den Math. Annal. 5 (1872), S. 128 gezeigt hat. Man muß also die Existenz des Grenzpunkts P durch das *Cantor*sche *Axiom* fordern. Wir haben darauf S. 6 in der Fußnote anläßlich des Begriffs der Intervallschachtelung hingewiesen.

Eindeutig entspricht jetzt jeder Strecke eine Maßzahl, und jeder Maßzahl eine Strecke. Dadurch ist die Grundlage für die analytische Geometrie gelegt.

Der Proportionallehrsatz

Nach diesen grundsätzlichen Ausführungen über das Messen bietet der Beweis des Proportionallehrsatzes keine Schwierigkeit mehr.

In der Figur sei A_0B_0 parallel AB. $OA_0 = a_0$, $A_0A = a$, $OB_0 = b_0$, $B_0B = b$. a sei $> a_0$; andernfalls wäre das Folgende in leicht ersichtlicher Weise zu ändern. Wir beweisen jetzt den

Satz. a mit a_0 (als Einheit) gemesssen gibt dieselbe Maßzahl M wie b mit b_0 gemessen.

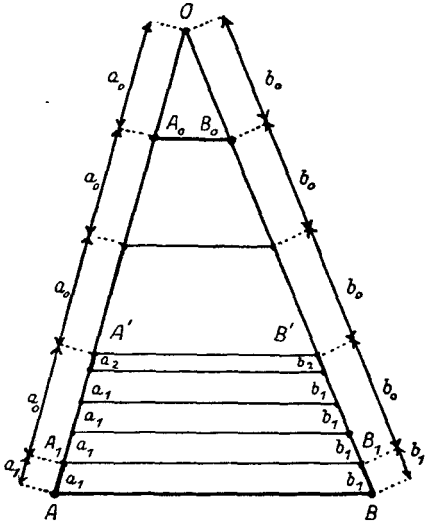

Fig. 24

Beweis. Man trage a_0 von A_0 aus auf $A_0A = a$, so oft als es geht, etwa q_0-mal ab; der letzte Punkt sei A_1, der vorletzte A' und das Reststück $A_1A = a_1$. Durch die Teilpunkte ziehe man die Parallelen zu AB. Auf dem andern Schenkel B_0B des Winkels O erhält man dann ebenso viele Strekken b_0, wie links Strecken a_0 auf A_0A liegen, und außerdem das Reststückchen $B_1B = b_1$. Es ist also

$$a = q_0a_0 + a_1\,, \qquad b = q_0b_0 + b_1\,. \tag{18}$$

Jetzt trage man a_1 auf der letzten Strecke $A_1A' = a_0$ so oft ab als es geht, etwa $q_1$mal, erhält das Reststückchen a_2 und zieht wieder durch die Teilpunkte die Parallelen zu AB, wodurch der Rest b_2 erscheint. Es ist dann

$$a_0 = q_1a_1 + a_2\,, \qquad b_0 = q_1b_1 + b_2\,; \tag{19}$$

so fährt man fort und erhält:

$$\begin{aligned} a_1 &= q_2a_2 + a_3\,, & b_1 &= q_2b_2 + b_3\,, \\ a_2 &= q_3a_3 + a_4\,, & b_2 &= q_3b_3 + b_4\,, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{20}$$

Setzt man nun

$$M = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}}\,, \tag{21}$$

so ist nach (11)

$$a = Ma_0\,, \qquad b = Mb_0\,, \tag{22}$$

und der Satz ist bewiesen.

Nun sollen alle vier Strecken a, a_0, b, b_0 mit *derselben* Maßeinheit e gemessen werden: die Maßzahlen seien $\overline{a}, \overline{a_0}, \overline{b}, \overline{b_0}$, so daß also

$$a = \overline{a}\, e, \quad a_0 = \overline{a_0}\, e; \quad b = \overline{b}\, e, \quad b_0 = \overline{b_0}\, e$$

ist. Führt man diese Größen in (22) ein, so folgt

$$\overline{a} = M\, \overline{a_0}, \quad \overline{b} = M\, \overline{b_0}.$$

Läßt man jetzt die Striche weg, bedenkt dabei aber, daß von jetzt ab a, a_0, b, b_0 die *Maßzahlen* der entsprechenden Strecken in bezug auf eine *beliebige Maßeinheit* bedeuten, so hat man

$$a = M a_0, \quad b = M b_0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0} (= M), \tag{23}$$

d. h. *die Aussage des Proportionallehrsatzes*. Da diese Proportion eine gewöhnliche „Zahlen"-Proportion ist, so gelten für sie alle Umformungsregeln der Algebra.

Durch dieses Verfahren ist nicht bloß der Proportionallehrsatz streng und anschaulich bewiesen, sondern auch ein Mittel gegeben, um die Maßzahl $M = \frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0}$ zu finden. Auch sieht man, *daß im Grunde die Kommensurabilität oder Inkommensurabilität gar keine Rolle spielt*. Wir haben oben diese Begriffe nur deshalb eingeführt, um zu zeigen, daß inkommensurablen Strecken im geometrischen Gebiet eine irrationale Maßzahl auf dem algebraischen Gebiet entspricht.

Flächenmessung

Wie man eine Strecke mit einer Einheitsstrecke gemessen hat, so werden Flächeninhalte mit einer Einheitsfläche gemessen. Als Einheitsfläche nimmt man das Quadrat, das die Einheitsstrecke zur Seite hat. Einen Flächeninhalt berechnen, heißt angeben, wie oft das Einheitsquadrat in die Fläche gelegt werden kann. Diese Zahl heißt, falls sie vorhanden ist, die Inhaltszahl J der Fläche. Das Einheitsquadrat bezeichnen wir mit □.

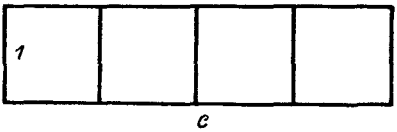

Fig. 25

1. Fall. Rechteck mit den Seiten 1 und c, wo c eine ganze Zahl ist. Aus der Fig. 25 folgt unmittelbar

$$J = c\,□. \tag{24}$$

2. Fall. Rechteck mit den Seiten 1 und c, wo c eine rationale Zahl gleich $\frac{p}{q}$ ist (p und q ganze Zahlen).

Man nehme das $q$fache der Seite c, dann ist der Inhalt des neuen Rechtecks das $q$fache des gegebenen, und die neue Rechteckseite ist

gleich p. Nach dem ersten Fall hat das große Rechteck als Maßzahl seines Inhalts $J' = p\,\square$ und daher das gegebene $J = \frac{p}{q}\square = c\square$. Es gilt also wieder (24).

3. Fall. Rechteck aus den Seiten 1 und c, wo c eine irrationale Zahl ist.

Man denke sich c in einen Kettenbruch verwandelt. $M_{2\nu}$, $M_{2\nu+1}$ seien zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche, dann ist nach § 15, (5)

$$M_{2\nu+1} > c > M_{2\nu}\,.$$

Man trage nun auf c von einem Endpunkt aus die Strecken $M_{2\nu+1}$ und $M_{2\nu}$ ab (Fig. 26). Das Rechteck aus den Seiten 1 und $M_{2\nu+1}$ hat nach dem 2. Fall den Inhalt $M_{2\nu+1}\,\square$, und das Rechteck aus den Seiten 1 und $M_{2\nu}$ den Inhalt $M_{2\nu}\square$. Mit wachsendem ν nähern sich die beiden Rechtecke mehr und mehr dem gegebenen, und die Zahlen $M_{2\nu}$, $M_{2\nu+1}$ der Zahl c. Geht man zur Grenze über, so hat man wieder

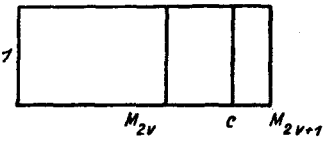

Fig. 26

$$J = c\square$$

also die Gleichung (24).

4. Fall. Rechteck mit den beliebigen Seiten a und b.

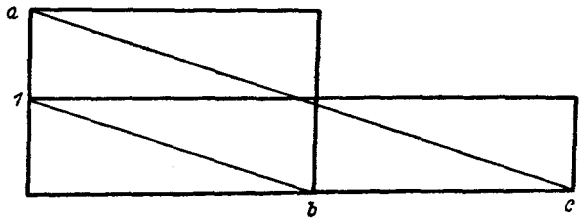

Fig. 27

Man verwandle in bekannter Weise das Rechteck in ein inhaltgleiches mit der Seite 1, die andere Rechtecksseite sei gleich c. Nach dem Proportionallehrsatz ist

$$a:1 = c:b\,, \qquad ab = c\,.$$

Da das neue Rechteck den Inhalt $c\square$ hat, so folgt aus der letzten Gleichung

$$J = ab\square\,.$$

Die Maßzahl für den Inhalt eines Rechtecks erhält man also, indem man die Maßzahlen der Rechtecksseiten miteinander multipliziert.

§ 18. Proportionenlehre ohne Stetigkeitsbetrachtungen

Die Grundlage der in § 17 gegebenen Lehre von den Proportionen bildete das *Archimedische Axiom,* also ein Stetigkeitsaxiom. Um solche Stetigkeitsbetrachtungen kommt man nicht herum, wenn man die Strecken messen will. Für die Anwendungen der Geometrie auf die Naturwissenschaften und die Technik bedarf man nun gerade einer Proportionenlehre in dem angegebenen Sinne. Darum wird auch die Lehre von den Proportionen, die sich auf das Messen gründet, im Schulunterricht ihren wichtigen Platz bewahren.

Die Geometrie als solche kann indes auch *ohne Stetigkeitsbetrachtungen* ihr System aufbauen, sie bedarf des Maßes nicht. An Stelle der Proportionenlehre, die sich auf das Maß gründet, tritt dann die Proportionenlehre, wie sie *Hilbert*[1]) als erster in seinen Grundlagen der Geometrie dargestellt hat. Ich nenne sie kurz die „reine" Proportionenlehre im Gegensatz zur „gewöhnlichen" Proportionenlehre. Mit Hilfe einer genialen Streckenrechung gelingt es *Hilbert,* auf Grund des *Pascal*schen Satzes in Beziehung auf ein Geradenpaar die reine Proportionenlehre einwandfrei zu begründen. Für die Schule kommen die Beweisgänge *Hilberts* als zu schwierig nicht in Frage. Mit Hilfe einer merkwürdigen Figur, die man *Sylvester* verdankt, gelingt es aber, die Streckenrechnung auszuschalten und die *reine* Proportionenlehre vollständig elementar zu begründen[2]). Da diese Darstellung, wie ich aus früherer mehrjähriger Erfahrung weiß, zur Wiederholung von Lehrsätzen der Geometrie sehr geeignet ist und die älteren Schüler lebhaft interessiert, so möge sie in ihren wesentlichen Teilen hier angeschlossen werden.

Sylvester[3]) hat, wie schon erwähnt, einen Apparat beschrieben, den er Plagiograph nennt, und der als eine Verallgemeinerung des Pantographen oder Storchschnabels gelten kann. An das Gelenkparallelogramm $ABCD$ der Figur 28 sind die einander ähnlichen Dreiecke AED und CDF angegliedert, in denen die entsprechend bezeichneten Winkel einander gleich sind. Es ist nun mit Hilfe der *gewöhnlichen* Proportionenlehre leicht zu zeigen (und so hat *Sylvester* die Theorie des Apparates entwickelt), daß auch die Dreiecke BAE, FCB und FDE unter sich ähnlich sind, und ebenso, daß das Dreieck BEF zu den beiden Dreiecken AED und CDF ähnlich ist. Die außerordentlich bemerkenswerte Figur zeigt also zwei Tripel von je unter sich ähnlichen Dreiecken. Beschreibt nun E eine Figur unter Festhaltung des Punktes B, wobei zu beachten ist, daß in A, B, C, D Gelenke angebracht sind, so be-

[1]) Man vgl. des näheren *M. Zacharias,* Elementargeometrie, Encykl. der math. Wiss. III_1, Heft 5, S. 892f.

[2]) Vgl. *K. Kommerell,* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 21 (1912) S. 173.

[3]) *J. J. Sylvester,* „On the Plagiograph aliter the Skew Pantigraph." Nature, July 1, 1875. Vol. XII, S. 168.

schreibt F eine dazu ähnliche. B ist der Doppelpunkt der beiden ähnlichen Systeme. Dreht man die eine Figur um den Punkt B um den Winkel $EBF = EAD$, so kommt sie mit der anderen Figur in ähnliche Lage, wobei B der Ähnlichkeitspunkt ist. Die Strecken der von F beschriebenen Figur verhalten sich zu den entsprechenden der von E beschriebenen wie

$$BF:BE = AD:AE.$$

Das Merkwürdige der Figur 28 ist aber, daß man höchst einfach *ohne Proportionenlehre* die Existenz jener beiden Tripel von ähnlichen Dreiecken nachweisen kann. Das ist der Ausgangspunkt für meine Darstellung der *reinen* Proportionenlehre gewesen. Dabei bezeichnen wir jetzt zwei Dreiecke als ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen (Definition).

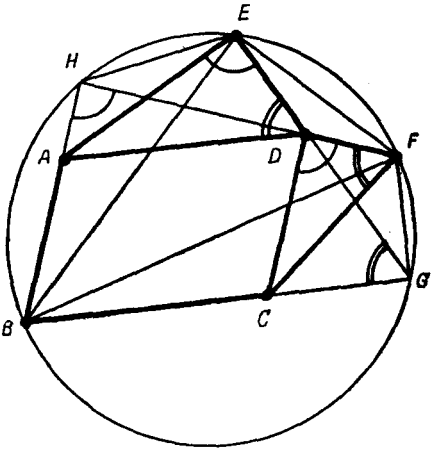

Fig. 28

In der Figur 28 wird also vorausgesetzt, daß $ABCD$ ein Parallelogramm ist, und daß Dreieck AED dieselben Winkel besitzt wie das Dreieck CDF, d. h., daß sie einander ähnlich sind. FD und BA schneiden sich in H, ED und BC in G. Es ist nun, weil AH parallel zu CD ist,

$$\sphericalangle CDF = \sphericalangle AHD = \sphericalangle AED,$$

und darum ist das Viereck

$$HEDA \text{ ein } \textit{Kreisviereck}. \tag{1}$$

Nun ist AD parallel BG, und deshalb ist auch das Viereck

$$HEGB \text{ ein } \textit{Kreisviereck}. \tag{2}$$

Entsprechend ist

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle DGC = \sphericalangle DFC,$$

und darum ist das Viereck

$$FGCD \text{ ein } \textit{Kreisviereck}. \tag{3}$$

Ebenso ist das Viereck

$$FGBH \text{ ein } \textit{Kreisviereck}, \tag{4}$$

da ja CD parallel BH ist.

Aus (2) schließt man, daß der Kreis um das Dreieck BGH durch E geht, und aus (4), daß auch F auf diesem Kreise liegt. ***Die fünf Punkte B, H, E, F, G liegen also auf einem und demselben Kreise.*** Man hat nun

nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle BEF = \sphericalangle BHF = \sphericalangle AED,$$
$$\sphericalangle EFB = \sphericalangle EGB = \sphericalangle EDA.$$

Das Dreieck EBF hat also dieselben Winkel wie das Dreieck EAD oder auch wie das Dreieck DCF. Alle drei Dreiecke sind also einander ähnlich. Weil nun

$$\sphericalangle BEF = \sphericalangle AED,$$

ist, so folgt sofort

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle DEF. \tag{5}$$

In dem Fünfpunktekreis sind weiter die Peripheriewinkel über EH einander gleich, d. h. es ist

$$\sphericalangle EBH = \sphericalangle EFH. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ist zu schließen, daß die Dreiecke

$$BAE \text{ und } FDE$$

einander ähnlich sind, und entsprechend zeigt man, daß zu ihnen auch das Dreieck FCB ähnlich ist, was wir aber für das Folgende nicht benutzen.

Wir stellen nun folgende Definition auf:

Definition. Die „Proportion" $a:b = c:d$ soll bedeuten, daß es zwei in den Winkeln übereinstimmende (ähnliche) *Dreiecke gibt, daß den Seiten a und b des einen Dreiecks die Seiten c und d des andern Dreiecks entsprechen* (Fig. 29). Es ist also wohl zu beachten, daß a, b, c, d *keine Zahlen,* sondern *Strecken* sind und daß $a:b = c:d$ nur ein Symbol ist und mit einer *Zahlen*proportion nichts zu tun hat. Legt man die beiden Dreiecke der Figur 29 so aufeinander, daß die beiden Winkel α sich decken (Fig. 30), so wird JK parallel LM.

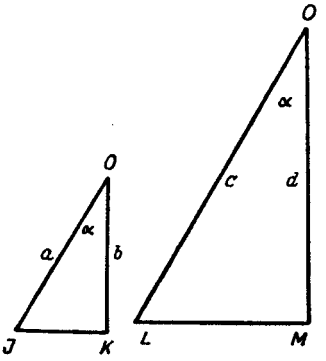

Fig. 29

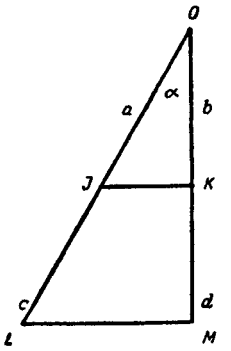

Fig. 30

Statt der Definition kann man also auch sagen: $a:b = c:d$ drückt aus, daß es einen Winkel α gibt, auf dessen Schenkel wie in Fig. 30 a, b, c, d abgetragen zu zwei parallelen Geraden JK und LM führen.

Es ist jetzt vor allem zu zeigen, daß, wenn a und b, ebenso c und d einen anderen Winkel α' einschließen, auch die neuen Dreiecke ähnlich sind, oder anschaulicher, wenn die Schenkel OL und OM des Winkels α auseinandergezogen oder zusammengerückt werden, daß dann JK zu LM parallel bleibt. Dieser Satz möge als *Fundamentalsatz der reinen Proportionenlehre* bezeichnet werden. Der Beweis fließt unmittelbar aus der *Sylvester*schen Figur 28. Denn bewegt man das Gelenkparallelogramm mit den auf ihm sitzenden (starren) Dreiecken AED und CDF, so bleiben die Dreiecke BAE und FDE stets einander ähnlich: die Seiten BA, AE, FD, DE behalten ihre Längen, während der Winkel $BAE = FDE$ sich ändert. Die Definition der Proportion ist also von der Größe der Winkel des zugrunde gelegten Dreieckspaares unabhängig.

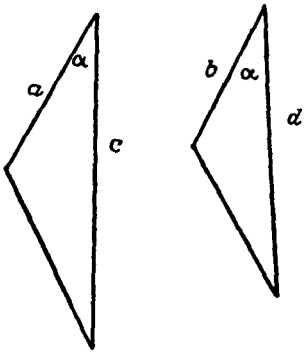

Fig. 31

Wir beweisen nun zweitens

Das kommutative Gesetz. Ist $a:b = c:d$, *so ist auch* $a:c = b:d$.

Geometrisch sagt dies aus, daß, wenn a und c auf den Schenkeln eines Winkels α aufgetragen werden (Fig. 31) und ebenso b und d, auch die neuen Dreiecke ähnlich sind.

Beweis. Auf Grund der Definition folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AED und CDF der Figur 28

$$AE:ED = CD:DF. \qquad (7)$$

Nun sind aber auch die Dreiecke BAE und FDE ähnlich, also ist wieder auf Grund der Definition

$$AE:AB = ED:DF$$

und, da $AB = CD$ ist,

$$AE:CD = ED:DF. \qquad (8)$$

In dieser Proportion sind aber im Vergleich zu (7) die inneren Glieder umgestellt.

Nun beweisen wir

Das transitive Gesetz. Aus $a:b = c:d$ *und* $a:b = e:f$ *folgt* $c:d = e:f$.

Geometrisch bedeutet dies mit Zuhilfenahme des kommutativen Gesetzes, daß, wenn in der Figur 32

AC parallel $A'C'$, AB parallel $A'B'$

ist, dann auch BC parallel $B'C'$ ist. Dies ist

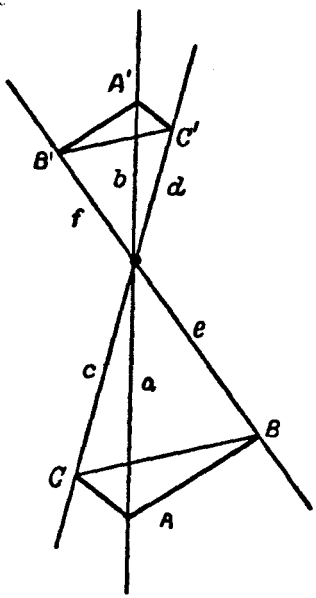

Fig. 32

der Inhalt *des* (speziellen) *Desargueschen Satzes*. Ist umgekehrt dieser Satz bewiesen, so gilt auch das transitive Gesetz.

Beweis. Denkt man sich die *Sylvester*sche Figur 28 in anderer Folge entstanden, so kann aus ihr ebenfalls recht einfach der *Desargues*sche Satz entnommen werden. Gegeben sei der Punkt E (Pol). Man lege an ED das beliebige Dreieck EAD und an EF das ihm ähnliche Dreieck EBF (Fig. 33a). Die Strecke DF wird so in die ihr entsprechende AB übergeführt. Da nun die Dreiecke EDF und EAB ähnlich waren, so folgt, daß durch Drehung des Dreiecks EDF um den Punkt E um

$$\sphericalangle \omega = \sphericalangle AED = \sphericalangle BEF$$

die Strecke DF in ihrer neuen Lage $D'F'$ parallel zu AB wird und AD' und BF' durch E gehen (Drehstreckung). In der Figur 33b ist nun für O als Pol die entsprechende Konstruktion für die *drei* Punkte A, B, C ausgeführt. An die Radienvektoren OA, OB, OC sind der Reihe nach die unter sich ähnlichen Dreiecke OAA_1, OBB_1 und OCC_1 angelegt; das Dreieck ABC ist so (durch die Drehstreckung) in das Dreieck

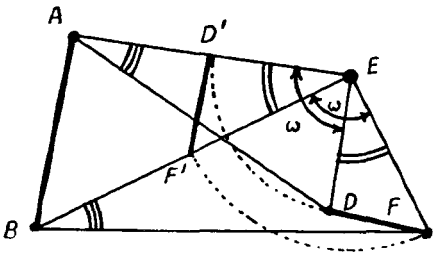

Fig. 33a

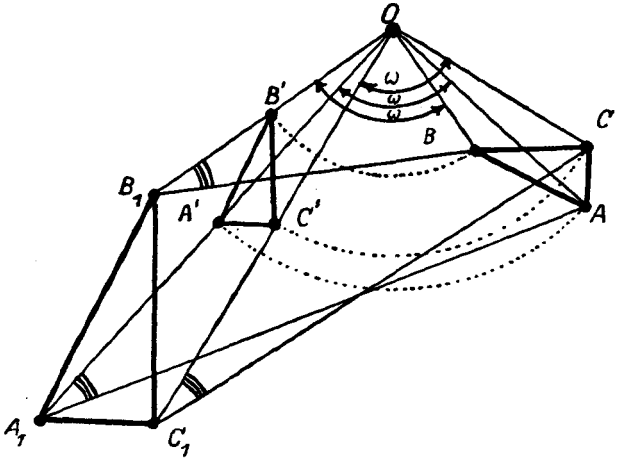

Fig. 33b

$A_1B_1C_1$ übergeführt. Aus dem soeben Gesagten folgt nun sofort, daß das Dreieck ABC durch eine Drehung um O um den Winkel

$$\omega = \sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle BOB_1 = \sphericalangle COC_1$$

in die perspektive Lage $A'B'C'$ zu $A_1B_1C_1$ kommt und dabei entspre-

chende Seiten in der neuen Lage parallel laufen. Damit ist aber der Lehrsatz des *Desargues* und damit das transitive Gesetz bewiesen.

Beschreibt allgemein A eine beliebige Figur, so beschreibt A_1 eine entsprechende Figur, und zwar kann die eine Figur durch Drehung um den Pol um den $\sphericalangle \omega$ mit der anderen in perspektive Lage gebracht werden, so daß entsprechende Strecken nach der Drehung parallel sind; die entsprechenden Winkel in den beiden Figuren sind also einander gleich. Zwei solche Figuren sollen als ähnliche bezeichnet werden. Da nun im *Sylvester*schen Plagiographen das Dreieck EBF während der Bewegung immer mit sich ähnlich bleibt, so beschreiben die Punkte E und F in bezug auf B als Pol ähnliche Figuren in dem soeben angegebenen Sinne.

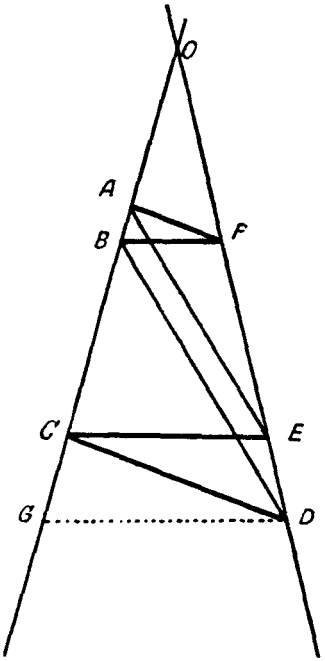

Fig. 34

Wir beweisen endlich noch den *Pascal*schen Satz für ein Geradenpaar:

Pascalscher Satz. Ist in der Figur 34 *AF parallel CD, BF parallel CE, so ist auch AE parallel BD.*

Beweis[1]. Man ziehe DG parallel BF. Weil AF parallel CD ist, gilt

$$OC:OA = OD:OF, \tag{9}$$

und weil BF parallel GD ist,

$$OD:OF = OG:OB. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt nach dem transitiven Gesetz

$$OC:OA = OG:OB$$

und hieraus nach dem kommutativen Gesetz

$$OC:OG = OA:OB. \tag{11}$$

Weil GD auch mit CE (parallel BF) parallel ist, folgt

$$OC:OG = OE:OD, \tag{12}$$

und jetzt aus (11) und (12) nach dem Transitivgesetz

$$OA:OB = OE:OD, \tag{13}$$

also ist AE parallel BD.

Wir ziehen aus dem *Pascal*schen Satz für die reine Proportionenlehre noch eine Folgerung. Die Voraussetzungen des Satzes können so geschrieben werden

$$OA:OC = OF:OD, \quad OB:OC = OF:OE \tag{14}$$

[1]) Vgl. *K. Fladt*, Elementargeometrie, Bd. I, 1928, S. 92f.

und die Folgerung (13)

$$OA:OB = OE:OD. \tag{15}$$

Die Proportionen (14) haben dieselben inneren Glieder und die Proportion (15) hat als äußere Glieder die äußeren der ersten Proportion von (14) und als innere Glieder die äußeren der zweiten Proportion von (14). Man hat also den

Satz: Ist $a:b = c:d$ *und* $e:b = c:f$, *so ist auch* $a:e = f:d$.

Man zeigt nun leicht, daß für die reine Proportion

$$a:b = c:d$$

dieselben Rechenregeln gelten wie für die gewöhnliche, wo a, b, c, d Maßzahlen sind; z. B.

$$a:(a-b) = c:(c-d),\ (a+b):(a-b) = (c+d):(c-d),\ \text{usw.}$$

Das ist jetzt so elementar zu beweisen, daß wir nicht darauf eingehen.

Damit ist aber unabhängig vom Maß eine Proportionenlehre gewonnen, die für die reine Geometrie dieselben Dienste leistet wie die gewöhnliche.

Wir wollen dies an einer ganz elementaren Aufgabe zeigen.

Aufgabe. In das Viereck $ABCD$ *soll ein Rhombus* $EFGH$ *einbeschrieben werden, dessen Ecken auf den Seiten des Vierecks liegen, und dessen Seiten mit den Diagonalen des Vierecks parallel gehen.*

Man hat

$$AE:AB = EH:BD,$$

$$BE:AB = EF:AC;$$

beide Proportionen haben dieselben inneren Glieder ($EH = EF$), also ist nach dem letzten Satz

$$AE:BE = AC:BD$$

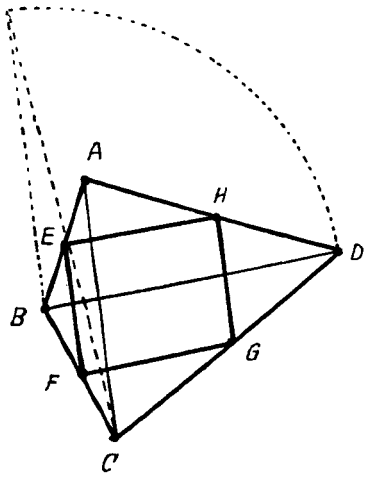

Fig. 35

und hieraus folgt genau dieselbe Konstruktion, die man erhalten würde, falls es sich um Zahlenproportionen handeln würde.

Der Pascalsche Lehrsatz bezüglich des Kreises

Als wichtigste *Anwendung der reinen Proportionenlehre beweisen wir den Pascalschen Satz bezüglich des Kreises.*

Dieser Satz sagt bekanntlich aus, daß, wenn sechs beliebige Punkte eines Kreises (Fig. 36) in irgendeiner Reihenfolge mit den Nummern 1—6 versehen werden und man den Schnittpunkt

A der Geraden 12 und der Geraden 45,
B „ „ 23 „ „ „ 56,
C „ „ 34 „ „ „ 61

sucht, die drei Punkte A, B, C in gerader Linie liegen.

Zum Beweis beschreibe man um das Dreieck $14C$ den Kreis, der 12 in E, 45 in D schneiden möge. Es sieht nun so aus, wie wenn die Seiten des Dreiecks DCE mit denen des Dreiecks $5B2$ parallel laufen würden. Gelingt dies zu beweisen, so folgt nach der Umkehrung des Satzes von *Desargues*, die natürlich auch gilt, daß die Dreiecke perspektiv liegen, daß also $5D$, $2E$, BC durch einen Punkt gehen, d. h. BC geht durch A. Der Nachweis des ersteren gelingt aber mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes sehr einfach. Der Winkel $41E$ ist Peripheriewinkel im kleinen Kreis über dem Bogen $4E$ und im großen über dem Bogen 42; man hat also

$$\sphericalangle 41E = \sphericalangle 4DE = \sphericalangle 4CE = \sphericalangle 452 = \sphericalangle 432;$$

es ist also DE parallel 52 und CE parallel 32. Ebenso hat man

$$\sphericalangle E1C = \sphericalangle EDC = \sphericalangle 256,$$

und darum DC parallel 56. Damit ist aber alles bewiesen.

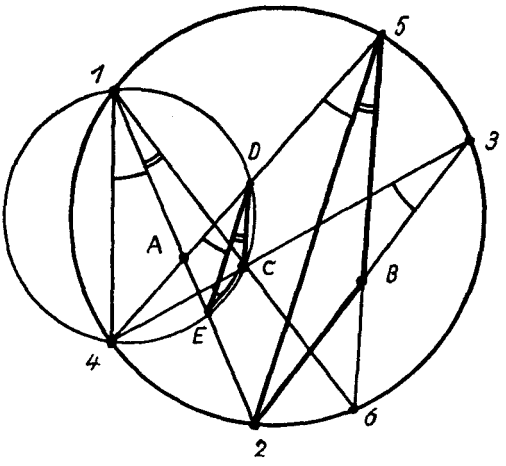

Fig. 36

Durch diesen Beweis, den ich a. a. O. veröffentlicht habe, ist also gezeigt, daß der *Pascal*sche Satz ohne Maßbeziehungen bewiesen werden kann. Einen gleich einfachen Beweis für den Lehrsatz des *Brianchon*, der sich nicht auf die Polarentheorie (Dualitätsprinzip) stützt, zu finden, dürfte recht schwierig sein.

Bemerkungen zur Proportionen- und Inhaltslehre

Da im Schulunterricht natürlich nicht die „reine", sondern die „gewöhnliche" Proportionenlehre in Betracht kommt, diese letztere aber bei ihrem Aufbau ziemliche Schwierigkeiten macht und Mittel benutzt, die eigentlich für die reine Geometrie entbehrlich sind, so wird es in der Natur der Sache liegen, alle die Sätze, die ohne Benutzung des Maßes sich leicht beweisen lassen, auch so im System zu bringen. Dieser Grundsatz wird aber in den Lehrbüchern durchaus nicht befolgt. So steht der Satz, daß der obere Abschnitt einer seitenhalbierenden

Transversalen das Doppelte des unteren ist, fast überall in dem Abschnitt über Proportionen. Es handelt sich hier um den Satz, daß, wenn in einem Trapez $ABCD$ die obere Grundlinie AD die Hälfte der unteren ist, $BO = 2OD$ ist, wo O der Diagonalschnittpunkt ist. Man verlängert AO und DO über O um sich selbst bis A' und D', dann ist $A'D'$ die Mittelparallele im Dreieck OBC, und daraus fließt unmittelbar der Satz; dann folgt in der bekannten Weise, daß die drei Mittelpunktstransversalen durch einen Punkt gehen. So kommt der Satz an diejenige Stelle des Systems, wo er seiner Natur nach hingehört, und befindet sich dann in der Nachbarschaft der entsprechenden Sätze über den Höhenschnittpunkt und den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Eine ebenso merkwürdige Stellung nehmen in den Lehrbüchern der *Tangentensatz, Sekantensatz* und *Sehnensatz* ein. Durchweg werden diese Sätze mit Hilfe der Proportionen bewiesen, während sie sachlich zu den Sätzen vom Kathetenquadrat und Höhenquadrat gehören. Schon *Euklid* läßt den Tangentensatz als Folge des pythagoreischen Satzes erscheinen (III. Buch, 36. Satz). Ich möchte vorschlagen, den Satz über das Tangentenquadrat am Ende des Kapitels zu bringen, wo die Sätze über das Kathetenquadrat, das Höhenquadrat und der pythagoreische Satz stehen. Ich will sogleich für ihn einen von diesen Sätzen unabhängigen Beweis geben, wie es in meinen obenerwähnten Arbeiten geschehen ist. Aus ihm kann man dann die übrigen Sätze wiederum leicht gewinnen, was sich zu Übungszwecken empfiehlt.

Satz 1. (Tangentensatz.) *Wird eine Kreistangente von einer Sekante geschnitten, so hat das Quadrat über der Tangente denselben Inhalt wie das Rechteck, dessen Seiten die vom Schnittpunkt aus gemessenen Sekantenabschnitte sind.*

Beweis. In der Fig. 37 sei CD die Tangente, CA die Sekante, $CDGH$ sei das Tangentenquadrat, $BCFE$ das Rechteck aus den beiden Sekantenabschnitten, also $CF = CA$. Man verlängere nun GH, bis sie die Verlängerung von EF in K trifft. Weiter möge die Gerade DB die Gerade GK in J, EK in L treffen. Endlich ziehe man HF, CK und AD. Zunächst zeigen wir, daß CK mit DL parallel ist. Dreht man das Dreieck ACD um den Punkt C um 90^0, so fällt es mit dem Dreieck FCH zusammen. Es ist daher

$$\sphericalangle HFC = \sphericalangle DAC = \alpha_1. \tag{1}$$

Da ferner $\sphericalangle CHK = \sphericalangle CFK = 90^0$ ist, so ist das Viereck $CHFK$ ein Kreisviereck, also

$$\sphericalangle HFC = \sphericalangle HKC = \alpha_1. \tag{2}$$

Weiter ist

$$\sphericalangle GJD = \sphericalangle JDC = \alpha_2, \tag{3}$$

weil GJ parallel zu CD ist. Nach einem bekannten Satz der Kreislehre ist aber $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDC$, also

$$\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_2.$$

Aus (2) und (3) folgt, daß $\sphericalangle GKC = \sphericalangle GJD$ ist und daß somit in der Tat CK parallel DJ ist. Das Rechteck $BCFE$ ist nun dem Parallelogramm $BCKL$, dieses dem Parallelogramm $DJKC$ und letzteres dem Quadrat $CDGH$ inhaltsgleich; denn je zwei aufeinanderfolgende Parallelogramme haben dieselbe Grundlinie und Höhe. Darum ist das Quadrat über der Tangente $CDGH$ mit dem Rechteck aus den Sekantenabschnitten $BCFE$ inhaltgleich, w. z. b. w.

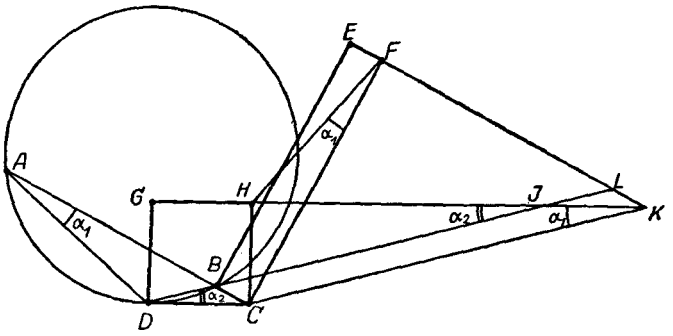

Fig. 37

Zieht man vom Punkt C aus eine zweite Sekante CB_1A_1 an den Kreis und wendet auf diese den Satz 1 an, so folgt:

Satz 2. (Sekantensatz.) *Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises zwei Sekanten, so hat das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sekante denselben Inhalt wie das Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sekante, wobei die Abschnitte vom Schnittpunkte aus zu rechnen sind.*

Schneiden sich die Sekanten innerhalb des Kreises, so trage man die Sehnenabschnitte vom Schnittpunkte aus so aufeinander ab, daß sie die Lage wie bei Satz 2 haben. Man erkennt dann sofort ein Kreisviereck, auf das der Satz 2 angewendet werden kann.

Beschreibt man jetzt über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser den Halbkreis, so ist die andere Kathete Tangente an diesen, und aus Satz 1 fließt dann unmittelbar der Satz vom Kathetenquadrat und hieraus der pythagoreische Lehrsatz. Klappt man ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Höhenfußpunkt H ist, um die Hypotenuse BC um nach $A'BC$, so ist $A'BAC$ ein Kreisviereck, in dem AA' und BC Sehnen sind und H der Mittelpunkt von AA'. Hieraus folgt der Satz vom Höhenquadrat. Nun stehen alle entsprechenden Sätze, wie sie logisch zusammengehören, auch im System beieinander.

Hat man die Inhalts*berechnung* behandelt, so kann man alle diese Sätze in Proportionenform aussprechen: aus $h^2 = pq$ folgt z. B. $p:h = h:q$ aus $a^2 - b^2 = c^2$ folgt $(a-b):c = c:(a+b)$ usw. Endlich

wird man zeigen, wie alle diese Proportionen auch aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke sich ergeben. Die Schüler meinenvielfach, daß die Sätze in der anderen Fassung Neues bedeuten, während diese andere Fassung eben dadurch ermöglicht wird, daß die *Maßzahlen* für die Strecken eingeführt werden.

Auch in bezug auf den pythagoreischen Lehrsatz verfahren die Lehrbücher nicht konsequent. Während alle die genannten Sätze mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken in Proportionenform gegeben werden, so geschieht dies nicht mit dem Lehrsatz des *Pythagoras*.

$$(a - b) : c = c : (a + b). \tag{16}$$

Will man aus einer Figur (16) ablesen, so liegt es doch sehr nahe, daß man in der Fig. 38 um C mit der Hypotenuse a des rechtwinkligen Dreiecks ABC einen Kreis beschreibt, der AC in D und E trifft. Jetzt ist $DA = a - b$ und $AE = a + b$, und die Gleichung (16) ergibt sich jetzt sofort, wenn man den Höhensatz in Proportionenform in bezug auf das bei B rechtwinklige Dreieck DBE anwendet. Übrigens erhält man (16) auch, wenn man um C mit $CA = b$ den Kreis beschreibt, mit der Hypotenuse schneidet und den Tangentensatz anwendet.

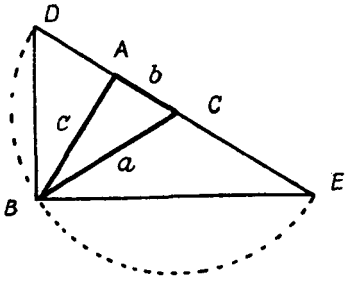

Fig. 38

In der Form (16) findet sich der pythagoreische Lehrsatz bei *Vieta* (1540—1603). Diese Art der Ableitung des pythagoreischen Lehrsatzes, die die Proportionenlehre voraussetzt, gibt wohl den fundamentalen Satz am schnellsten, und zwar in der Form, in der er fast ausschließlich in den Anwendungen gebraucht wird, wo a, b, c *Maßzahlen* bedeuten.

Die Fig. 38 ist identisch mit der Fig. 2, aus der wir die pythagoreischen Dreiecke ableiteten.

§ 19. Quadratur der Parabel. Summe der Quadrat- und Kubikzahlen. Der Satz von Fermat

Es möge die Parabel

$$x^2 = 2py \tag{1}$$

gegeben sein und die Parallele (Fig. 39) A_nB_n *zur y-Achse. Verlangt sei die Berechnung des Inhalts der von der Parabel, der x-Achse und der Geraden* A_nB_n *begrenzten Fläche.*

Zu diesem Zwecke möge die Abszisse $A_0A_n = a$ durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ in n gleiche Teile geteilt werden; die zugehörigen Abszissen mögen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet werden, so daß

$$x_1 = \frac{a}{n}, \quad x_2 = \frac{2a}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{na}{n}$$

ist; die zugehörigen Parabelordinaten mögen $A_1B_1 = y_1$, $A_2B_2 = y_2$, ..., $A_nB_n = y_n = b$ sein; nach (1) ist dann

$$y_1 = \frac{a^2}{2p} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad y_2 = \frac{a^2}{2p} \cdot \frac{2^2}{n^2}, \quad y_3 = \frac{a^2}{2p} \cdot \frac{3^2}{n^2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{a^2}{2p} \cdot \frac{n^2}{n^2} = b. \quad (2)$$

Durch die Punkte B_1, B_2, B_3, ... werden zur x-Achse die Parallelen gezogen, so daß in der Figur die Punkte C_0, C_1, C_2, C_3, ... und D_2, D_3, D_4, ... entstehen. Ist J der gesuchte Inhalt, so sieht man, daß J größer ist als die Summe folgender Rechtecke

$$B_1A_1A_2D_2 + B_2A_2A_3D_3 + \ldots + B_{n-1}A_{n-1}A_nD_n. \quad (3)$$

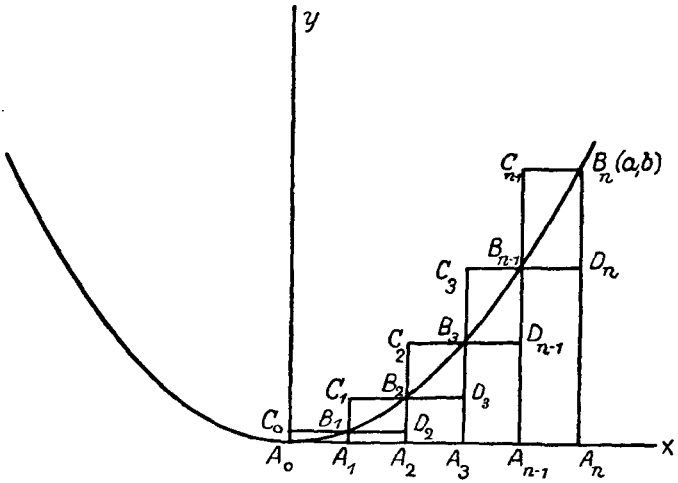

Fig. 39

Es ist also

$$J > \frac{a}{n} \cdot y_1 + \frac{a}{n} \cdot y_2 + \ldots + \frac{a}{n} \cdot y_{n-1}$$

oder, wenn man den Posten $\frac{a}{n} \cdot y_n = \frac{a}{n} \cdot b$ hinzufügt und wieder wegnimmt,

$$J > \frac{a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) - \frac{ab}{n},$$

oder nach (2)

$$J > \frac{a^3}{2pn^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - \frac{ab}{n}. \quad (4)$$

Es fragt sich nun, *um wieviel* J größer ist als die rechts in (4) stehende Größe. Nennen wir diesen Betrag ε_n, so ist offenbar ε_n die Summe der in der Figur von dem Parabelbogen begrenzten dreieckigen Figuren ($B_1D_2B_2$ usw.). Die Summe dieser kennt man vorerst nicht, aber es ist jetzt jedenfalls

$$J = \frac{a^3}{2pn^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - \frac{ab}{n} + \varepsilon_n.$$

Benutzt man die unten zu beweisende Formel

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

so folgt

$$J=\frac{a^3}{2pn^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{ab}{n}+\varepsilon_n. \tag{5}$$

Nun möge die Zahl n unaufhörlich wachsen, und es werde dann zunächst untersucht, welche Veränderung dabei ε_n, d. h. die Summe der schraffierten Dreiecke, erleidet. Es wäre voreilig zu schließen, daß diese Summe immer kleiner und schließlich gleich Null werde, weil die Dreiecke selbst immer kleiner werden. Denn man kann dagegenhalten, daß ja auch die Zahl dieser Dreiecke immer größer wird. Jedenfalls aber kann man sagen, daß

$$\varepsilon_n < C_0A_0A_1B_1+C_1B_1D_2B_2+C_2B_2D_3B_3+\ldots+C_{n-1}B_{n-1}D_nB_n$$

ist. Diese Rechtecke verschiebe man alle parallel der x-Achse nach rechts, bis sie an die Ordinate A_nB_n anstoßen; dann sieht man, daß sie zusammen genau das Rechteck $A_{n-1}C_{n-1}B_nA_n$ ausfüllen. Es ist also

$$\varepsilon_n<\frac{ab}{n},$$

woraus hervorgeht, daß

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0 \tag{6}$$

ist. Nach (5) ist nun

$$J=\frac{a^3}{12p}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{ab}{n}+\varepsilon_n.$$

Läßt man jetzt n unaufhörlich wachsen, so sieht man, daß in der Grenze

$$J=\frac{a^3}{6p}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2p}\cdot a=\frac{ab}{3}$$

wird.

Der Inhalt J ist also gleich dem dritten Teil des Rechtecks aus den Seiten A_0A_n und A_nB_n.

Die soeben ausgeführte „Integration" ist historisch deshalb interessant, weil sie ungefähr das Verfahren darstellt, das *Archimedes* angewendet hat. Auch die Formel für die Summe der Quadratzahlen findet sich, wenn auch in anderer Form, bei *Archimedes*. Freilich schien es bis vor kurzem, daß *Archimedes* lediglich die bekannte Exhaustionsmethode zur Berechnung von Längen, Flächen- und Körperinhalten angewendet hätte. Die von *J. L. Heiberg* im Jahre 1906 in Konstantinopel aufgefundene „*Methodenlehre*"[1]) von *Archimedes* läßt aber erkennen, daß *Archimedes* im Besitze der Methoden war, die nachher *Kepler, Cavalieri, Pascal, Fermat* und andere Mathematiker des 17. Jahrhunderts

[1]) *J. L. Heiberg* und *H. G. Zeuthen*, Bibliotheca math. (3) 7 (1907), S. 321—363.

angewendet haben. *Archimedes* selbst hielt, wie er es in der Methodenlehre ausspricht, die durch Summation unendlich vieler, unendlich kleiner Teile gefundenen Ergebnisse nicht für streng genug. Darum hat er wohl die durch Integration gefundenen Sätze nachher mit der Methode der Exhaustion für sich und seine Zeitgenossen streng bewiesen. So ist es auch erklärlich, daß die Schrift oder die Schriften des *Archimedes*, welche die Integrationsmethode enthielten, verschollen sind, und daß ein glücklicher Zufall erst so spät uns einen Einblick in die Arbeitsmethoden des genialen Mannes gewährt hat.

Die *Summe der aufeinanderfolgenden Quadratzahlen, Kubikzahlen* usw. kann außer mit Hilfe der Theorie der höheren arithmetischen Reihen auch sehr hübsch mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes gefunden werden. Da dieses Verfahren in den elementaren Lehrbüchern vielfach fehlt, so möge es hier kurz dargestellt werden.

Man setze in der Formel

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots \quad + x^n ,$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, für x der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, a$ und erhält so

$$\begin{aligned}
2^n &= 1 + \tbinom{n}{1} 1 + \tbinom{n}{2} 1^2 + \tbinom{n}{3} 1^3 + \ldots + \tbinom{n}{n-1} 1^{n-1} + 1^n , \\
3^n &= 1 + \tbinom{n}{1} 2 + \tbinom{n}{2} 2^2 + \tbinom{n}{3} 2^3 + \ldots + \tbinom{n}{n-1} 2^{n-1} + 2^n , \\
4^n &= 1 + \tbinom{n}{1} 3 + \tbinom{n}{2} 3^2 + \tbinom{n}{2} 3^3 + \ldots + \tbinom{n}{n-1} 3^{n-1} + 3^n , \qquad (7) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(1+a)^n &= 1 + \tbinom{n}{1} a + \tbinom{n}{2} a^2 + \tbinom{n}{3} a^3 + \ldots + \tbinom{n}{n-1} a^{n-1} + a^n .
\end{aligned}$$

Addiert man diese Gleichungen und läßt die sich auf beiden Seiten forthebenden Glieder $2^n, 3^n, \ldots, a^n$ weg, so folgt:

$$\begin{aligned}
(1+a)^n = (1+a) &+ \tbinom{n}{1} \{1 + 2 + 3 + \ldots \quad + a\} \\
&+ \tbinom{n}{2} \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \quad + a^2\} \\
&+ \tbinom{n}{3} \{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots \quad + a^3\} \qquad (8) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \tbinom{n}{n-1} \{1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \ldots \quad + a^{n-1}\} .
\end{aligned}$$

Setzt man nun in (8) für n die Zahl 2, so ergibt sich

$$(1+a)^2 = (1+a) + 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + a),$$

oder

$$1 + 2 + 3 + \ldots + a = \frac{a\,(a+1)}{2} , \qquad (9)$$

die bekannte Summenformel für die arithmetische Reihe erster Ordnung.

Jetzt nehme man in (8) für n die Zahl 3 und erhält

$$(1+a)^3 = (1+a) + 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + a^2)$$

und mit Hilfe von (9) nach kurzer Rechnung

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+a^2=\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}. \tag{10}$$

Für $n=4$ folgt entsprechend

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+a^3=\left\{\frac{a(a+1)}{2}\right\}^2=\left\{1+2+3+\ldots+a\right\}^2, \tag{11}$$

d. h. der bekannte Satz, *daß die Summe der a ersten Kubikzahlen stets eine Quadratzahl, nämlich das Quadrat der Summe der a ersten Zahlen ist.* Die Formeln (9)—(11) lassen sich natürlich auch durch den Schluß von a auf $a+1$ beweisen.

Aus den Formeln (8) kann man auch *einen einfachen Beweis des Fermatschen Satzes* über Primzahlen ableiten. Man setze dort statt a die Zahl $a-1$ und erhält

$$a^n-a=\binom{n}{1}\left\{1+2+3+\ldots+(a-1)\right\}+\binom{n}{2}\left\{1^2+2^2+3^2+\ldots+(a-1)^2\right\}+\ldots$$
$$+\binom{n}{n-1}\left\{1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\ldots+(a-1)^{n-1}\right\}. \tag{12}$$

Ist n eine Primzahl, so besitzen alle Binomialkoeffizienten rechts, die ja ganze Zahlen sind, den Faktor n. Daraus folgt, daß auch die linke Seite, nämlich

$$a(a^{n-1}-1)$$

durch n teilbar ist. Ist also a relativ prim zu n, d. h. enthält a den Faktor n nicht, so ist

$$a^{n-1}-1$$

durch n teilbar, oder es ist

$$a^{n-1}\equiv 1 \bmod n\,; \tag{13}$$

dies ist der *Fermatsche Satz.*

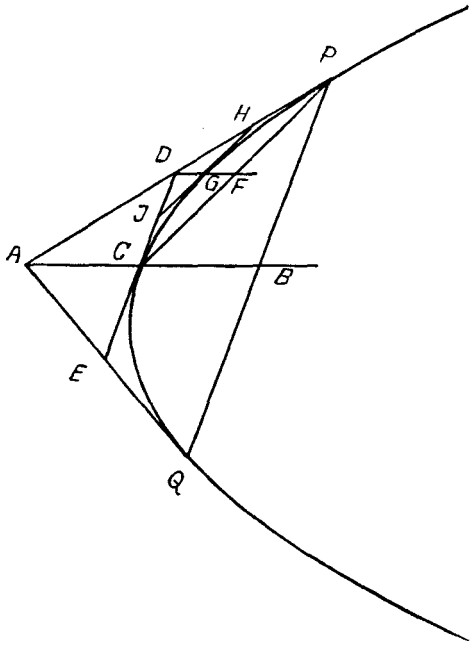

Fig. 40

Wir kehren noch einmal zur Parabel zurück und wollen noch auf einem zweiten sehr elementaren Wege die Parabel quadrieren, und zwar allgemeiner als oben, ein *beliebiges Parabelsegment.*

In der Fig. 40 sei PQ eine beliebige Parabelsehne, und es soll nun der Inhalt, der von der Parabel und der Sehne begrenzt wird, berechnet werden; wir nennen diesen Inhalt kurz das Segment PQ. Die Tangenten an die

Parabel in P und Q schneiden sich im Pol A von PQ. Die Polare des unendlich fernen Punkts von PQ — ein Durchmesser — geht durch A und die Mitte B von PQ. AB ist also parallel zur Parabelachse. Schneidet AB die Parabel in C, so ist $AC = CB$, da A, B, C und der unendlich ferne Punkt von AB vier harmonische Punkte sind. Weiter ist die Parabeltangente in C, die AP in D und AQ in E treffen möge, parallel zur Sehne PQ, und es ist $EC = CD$, da ja $QB = BP$ ist und $DE = \frac{1}{2} PQ$. Aus der Fig. 40 folgt nun

$$\triangle PCB = \triangle QBC = \triangle QCA = \triangle PAC,$$

also

$$\triangle PCQ = \frac{1}{2} \triangle PAQ. \tag{14}$$

Weiter folgt aus Fig. 40

$$\triangle DAE = \frac{1}{4} \triangle PAQ. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) ergibt sich

$$\triangle PCQ = 2 \triangle DAE. \tag{16}$$

Zieht man nun durch D (und ebenso durch E) wiederum den Parabeldurchmesser, der PC in der Mitte F und die Parabel in G schneide, und konstruiert man in G die Tangente, die PD in H und CD in J schneide, so folgt wie in (16)

$$\triangle PGC = 2 \triangle HDJ. \tag{17}$$

Durch unbeschränktes Fortsetzen dieses Verfahrens erhält man zwei Reihen von paarweise einander zugehörigen Dreiecken: die ersten sind der Parabel einbeschrieben wie $PCQ, PGC, \ldots$, die zweiten der Parabel umbeschrieben wie $DAE, HDJ, \ldots$ Jedes Dreieck der ersten Reihe ist doppelt so groß als das zugehörige Dreieck der zweiten Reihe und, da man der Anschauung entnimmt, daß beide Dreiecksreihen in der Grenze gerade das Dreieck PAQ ausfüllen, so liegt der Schluß nahe, daß das Parabelsegment PQ $\frac{2}{3}$ des Dreiecks PAQ ist. Dies läßt sich aber auch streng zeigen, indem man die Inhalte der beiden Dreiecksreihen berechnet.

Ist J der Inhalt des Dreiecks PAQ, so ist nach (14)

$$\triangle PCQ = \frac{J}{2}. \tag{18}$$

Nun ist nach (15) und, weil $AD = DP$ ist,

$$\triangle DAC = \frac{1}{2} \triangle DAE = \frac{1}{4} \cdot \frac{J}{2} = \triangle DCP. \tag{19}$$

Das Dreieck DCP spielt jetzt dieselbe Rolle wie zuerst das Dreieck PAQ, darum ist nach (18) $\triangle PGC = \frac{1}{2} \triangle DCP$, also

$$\triangle PGC = \frac{1}{8} \cdot \frac{J}{2}. \tag{20}$$

Beim Übergang von $\triangle PCQ$ zum nächsten Dreieck der Reihe sinkt der Inhalt auf den achten Teil; es sind aber *zwei* Dreiecke von der Größe PGC da, weil das aus der Ecke E entstandene dazukommt. Beim nächsten Schritt kommen vier Dreiecke vom Inhalt $\frac{J}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2$ hinzu, dann acht Dreiecke vom Inhalt $\frac{J}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^3$ usw. Man erhält also als Summe der einbeschriebenen Dreiecke

$$\frac{J}{2}+\frac{J}{2}\left(\frac{1}{8}\right)\cdot 2+\frac{J}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 4+\frac{J}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^3 8+\ldots$$

In dieser Reihe entsteht jedes Glied aus dem vorhergehenden dadurch, daß man letzteres mit 8 dividiert und mit 2 multipliziert: also jedes Glied ist der vierte Teil des vorhergehenden. Man hat also die konvergente geometrische Reihe

$$\frac{J}{2}+\frac{J}{2}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{J}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{J}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots=\frac{J}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2J}{3}.$$

Da nun jedes umbeschriebene Dreieck wie z. B. $\triangle DAE$ halb so groß als das zugehörige einbeschriebene wie z. B. $\triangle PCQ$ ist, so ergibt sich für die umbeschriebenen Dreiecke ebenfalls eine geometrische Reihe, die aus der vorhergehenden dadurch erhalten wird, daß man von jedem Glied die Hälfte nimmt: ihre Summe ist also $\frac{J}{3}$. Beide Summen geben zusammen somit genau den Inhalt des Dreiecks PAQ, wie oben richtig vermutet wurde. Man hat so den

Satz. Der Inhalt eines Parabelsegments ist zwei Drittel des Dreiecks, das von der Sehne und den in ihren Endpunkten gezogenen Tangenten begrenzt wird.

Ein Parabelsegment läßt sich also mit Zirkel und Lineal in ein Quadrat verwandeln, während dies bei einem Kreissegment nicht möglich ist.

II. Kapitel

Geometrische Transformationen

§ 20. Die Abbildung durch reziproke Radienvektoren (Inversion)

Eine der wichtigsten Abbildungen der Ebene auf sich selbst ist die Inversion. Da sie vollständig elementar dargestellt werden kann und schöne Anwendungen gestattet, so sollte auch der elementare Unterricht an ihr nicht vorübergehen.

Die Inversion wird durch einen Kreis J vermittelt, der als Inversionskreis bezeichnet wird: sein Zentrum sei O und sein Radius $= \varrho$. Jedem Punkt P der Ebene wird nun dadurch ein Punkt P' als entsprechend zugewiesen, daß man auf dem Halbstrahl OP den Punkt P' so bestimmt, daß

$$OP \cdot OP' = \varrho^2 \qquad (1)$$

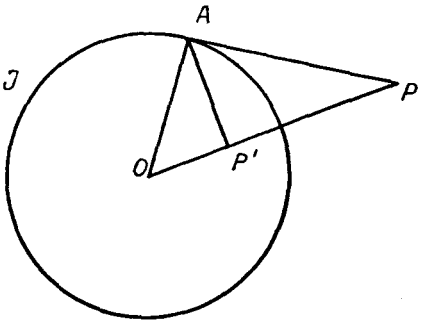

Fig. 41

wird. P' heißt das Bild von P, auch der inverse oder zugeordnete Punkt zu P, umgekehrt ist nach (1) P das Bild von P': die Abbildung ist vertauschbar (involutorisch). Man sagt auch: P' geht aus P durch eine Inversion hervor oder auch: P' ist das Spiegelbild von P in bezug auf den Inversionskreis. Setzt man $OP = r$, $OP' = r'$, so ist nach (1)

$$r r' = \varrho^2 \qquad (2)$$

oder $r' = \varrho^2 : r$, weshalb die Abbildung auch als „Abbildung durch reziproke Radienvektoren" bezeichnet wird.

Die Konstruktion des Bildes P' von P ist sehr einfach: Liegt P außerhalb des Inversionskreises, so ziehe man von P die Tangente PA an den Kreis, und fälle von A das Lot auf PO, so ist der Fußpunkt das Bild P'; denn in dem bei A rechtwinkligen Dreieck OAP gilt

$$OP \cdot OP' = (OA)^2 = \varrho^2 .$$

Liegt aber der abzubildende Punkt etwa P' im Innern des Kreises, so schneide man das in P' auf OP' erreichte Lot mit dem Kreis in A, worauf die Kreistangente in A aus der Geraden OP' das Bild P von P'

ausschneidet. Man kann auch sagen — und dies gilt für alle Fälle —, man erhält das Bild P' von P, indem man die Polare AP' von P in bezug auf J mit OP in P' schneidet. Alle Punkte außerhalb von J werden ins Innere abgebildet und umgekehrt: jeder Punkt von J fällt mit seinem Bild zusammen. Rückt P von O weg, so nähert sich P' dem Zentrum O. *Jeder* unendlich ferne Punkt hat sein Bild im Zentrum. Der Punkt O ist ein Ausnahmepunkt, insofern er nicht bloß ein Bild hat: jeder unendlich ferne Punkt kann als sein Bild angesprochen werden. Er ist aber auch der einzige Ausnahmepunkt.

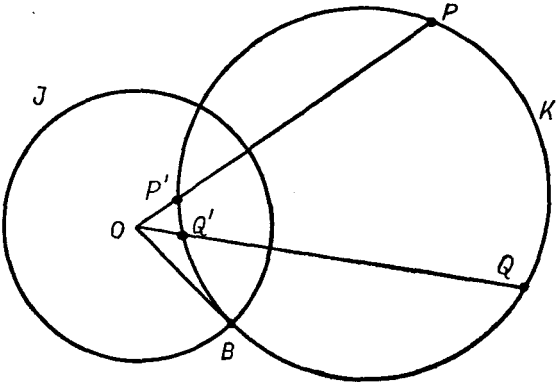

Fig. 42

Für diese Abbildung entstehen nun sofort einige wichtige Fragen, die wir dann der Reihe nach beantworten werden. Was entsteht aus einer Geraden, wenn sie Punkt für Punkt abgebildet wird? Was aus einem Kreis? Allgemein, wie sieht die Bildkurve einer beliebigen Kurve aus? Kann man aus den Eigenschaften einer Figur auf gewisse Eigenschaften der Bildfigur schließen? Diese und ähnliche Fragen erheben sich bei jeder Abbildung; sie beweisen, wie wichtig solche geometrische Transformationen für die Geometrie sind.

Einige spezielle Fälle der aufgeworfenen Fragen sind sofort zu erledigen. So fallen die Bilder der Geraden aus O mit diesen selbst zusammen. Beschreibt P einen zum Inversionskreis konzentrischen Kreis, ist also in (1) OP konstant und darum auch OP', dann beschreibt P' ebenfalls einen zu J konzentrischen Kreis. Wir zeigen weiter, daß jeder durch zwei zugeordnete Punkte P und P' gehende Kreis mit seinem Bild zusammenfällt. Sei also (Fig. 42) K ein Kreis durch die Punkte P und P', für die (1) gilt, und schneide eine beliebige Gerade aus O den Kreis K in Q und Q', so ist nach dem Sekantensatz $OQ \cdot OQ' = OP \cdot OP'$, also nach (1) $OQ \cdot OQ' = \varrho^2$, und Q' ist das Bild von Q, was behauptet wurde. Schneidet K den Kreis J in B, so ist $OP \cdot OP' = \varrho^2 = OB^2$; K berührt also OB in B, steht also senkrecht auf J. Man sieht auch umgekehrt, *daß jeder Orthogonalkreis K des Inversionskreises J mit seinem Bild zusammenfällt.*

Nun *suchen wir das Bild einer beliebigen Geraden G, die nicht durch das Inversionszentrum O geht.*

A sei der Fußpunkt des aus O auf G gefüllten Lotes und A' sein Bild. Der beliebige Punkt B von G werde nach B' abgebildet. Nach (1) hat man jetzt

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \varrho^2;$$

darum ist das Viereck $ABB'A'$ ein Kreisviereck, also

$$\sphericalangle BAA' + \sphericalangle BB'A' = \pi,$$

und darum

$$\sphericalangle BB'A' = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle A'B'O.$$

B' liegt also auf dem über OA' als Durchmesser beschriebenen Kreis; er ist das Bild G' von G, die Tangente in O an G' ist parallel zu G. Da nun die Abbildung vertauschbar ist, so hat man den

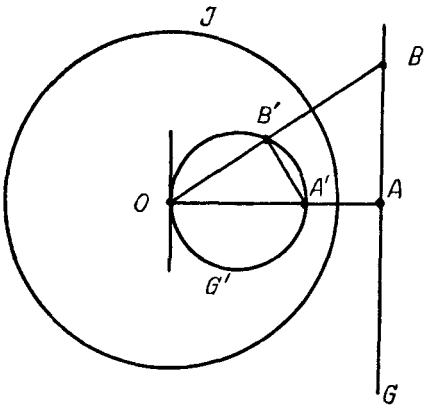

Fig. 43

Satz 1. Eine nicht durchs Inversionszentrum O gehende Gerade hat als Bild einen durch O gehenden Kreis, und jeder durch O gehende Kreis hat als Bild eine nicht durch O gehende Gerade.

Was ist nun das Bild K' eines Kreises K, der nicht durch das Inversionszentrum O geht? M sei der Mittelpunkt von K, und OM schneide K in A und B (Fig. 44); ihre Bilder seien A' und B', weiter sei C' das Bild eines beliebigen Punkts C von K. Es ist jetzt wieder nach (1)

$$OA \cdot OA' = OC \cdot OC' = \varrho^2,$$

und darum ist das Viereck $ACC'A'$ ein Kreisviereck, also

$$\sphericalangle CC'A' = \sphericalangle CAB. \quad (3)$$

Entsprechend ist

$$OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \varrho^2,$$

und darum das Viereck $BCC'B'$ ein Kreisviereck, und weiter

$$\sphericalangle OC'B' = \sphericalangle CBA. \quad (4)$$

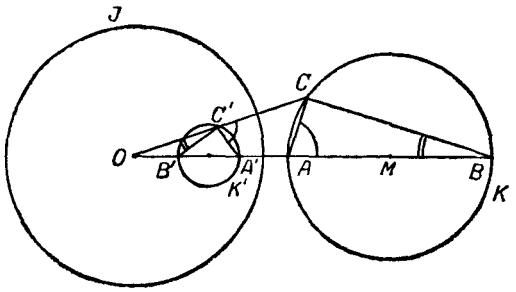

Fig. 44

Durch Addition folgt aus (3) und (4)

$$\sphericalangle CC'A' + \sphericalangle OC'B' = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = \frac{\pi}{2},$$

weil $\sphericalangle ACB$ als Winkel im Halbkreis $= \frac{\pi}{2}$ ist. Jetzt folgt

$$\sphericalangle A'C'B' = \frac{\pi}{2},$$

und darum ist der über $A'B'$ als Durchmesser beschriebene Kreis K' das Bild von K. Wie man den Mittelpunkt von K' aus dem Mittelpunkt M des gegebenen Kreises leicht finden kann, werden wir unten sehen; natürlich ist er *nicht* das Bild von M. Man hat so den

Satz 2. Jeder Kreis, der nicht durchs Inversionszentrum geht, bildet sich in einen Kreis ab.

Unter dem Winkel, den zwei Kurven in einem gemeinsamen Punkt P bilden, verstehen wir den Winkel (einer von den vieren) ihrer Tangenten in P. Wir wollen jetzt zeigen, daß bei der Inversion dieser Winkel ungeändert bleibt, daß also die Bildkurven in dem Bildpunkt P' von P denselben Winkel bilden.

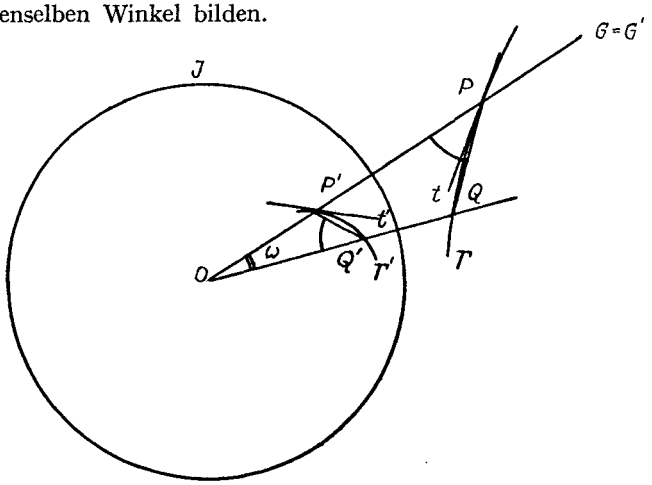

Fig. 45

Sei (Fig. 45) Γ eine beliebige Kurve, Γ' ihr Bild, weiter mögen P und P' entsprechende Punkte von Γ und Γ' sein. Wir zeigen jetzt zuerst, daß Γ mit der Geraden $OP = G$ denselben Winkel bildet wie Γ' mit $OP' = G'$, vorausgesetzt, daß die Winkel, wie sogleich näher angegeben wird, passend gerechnet werden. Für die Kurve Γ setzen wir natürlich voraus, daß sie in P eine wohldefinierte Tangente besitze. Sei nun Q ein Nachbarpunkt von P auf Γ, Q' sein Bild, so ist wieder nach (1)

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = \varrho^2,$$

und wieder ist das Viereck $PP'Q'Q$ ein Kreisviereck, also

$$\sphericalangle OQ'P' = \sphericalangle OPQ\,. \tag{5}$$

Bezeichnet man den Winkel POQ mit ω, so ist nach dem Außenwinkelsatz

$$\sphericalangle Q'P'P = \sphericalangle OQ'P' + \omega$$

und nach (5)

$$\sphericalangle Q'P'P = \sphericalangle OPQ + \omega\,. \tag{6}$$

Nun rücke Q auf Γ gegen P, dann nähert sich der Winkel OPQ immer mehr dem Winkel, den die Tangente t in P an Γ mit OP bildet, Q' wandert dabei auf Γ' gegen P', und ω wird immer kleiner. Geht man zur Grenze über, so folgt nach (6), daß der Winkel $Q'P'P$ einem bestimmten Grenzwert zustrebt, nämlich dem Winkel, den t mit G bildet. Die Kurve Γ' besitzt also auch in P' eine Tangente t', und diese bildet mit G' denselben Winkel wie t mit G, w. z. b. w.

Man achte noch darauf, daß PP' im verkehrten Sinne des Uhrzeigers gedreht werden muß, bis PP' mit t zusammenfällt, während in P' die Gerade $P'P$ im Sinne des Uhrzeigers selbst um denselben Winkel zu drehen ist, bis $P'P$ mit der Tangente t' in P' zusammenfällt.

Mit diesem Spezialfall ist aber auch der allgemeine Fall bewiesen; denn gehen durch P in Fig. 46 zwei Kurven (die Kurven sind nicht eingezeichnet), deren Tangenten t und t_1 in P mit PP' die Winkel α bzw. β bilden, so bilden in P' die Tangenten t' und t_1' an die Bildkurven mit $P'P$ auch die Winkel α bzw. β. Es ist also

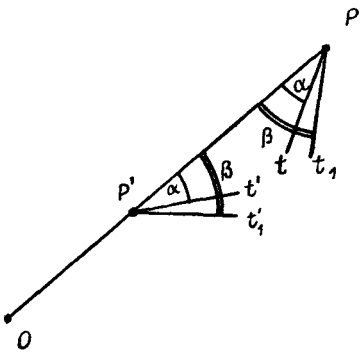

Fig. 46

$$\sphericalangle (t t_1) = \sphericalangle (t' t_1') = \beta - \alpha .$$

Weil nun bei der Inversion der Winkel zweier Kurven ungeändert bleibt, so nennt man die durch die Inversion vermittelte Abbildung *winkeltreu* oder *konform*. Es gilt also der

Satz 3. Die Inversion ist eine winkeltreue (konforme) *Abbildung.*

Man kann die Inversion von der Ebene auf den Raum ausdehnen: an die Stelle des Inversionskreises tritt dann eine Inversionskugel. Läßt man die Fig. 43 um OA als Achse rotieren, so hat man sofort den

Satz 4. Eine nicht durchs Inversionszentrum O gehende Ebene hat bei der räumlichen Inversion als Bild eine durch O gehende Kugel, deren Tangentialebene in O parallel zu der Ebene ist, und jede durch O gehende Kugel hat als Bild eine nicht durch O gehende Ebene. Die Ebenen durch O fallen mit ihren Bildern zusammen.

Läßt man entsprechend die Fig. 44 um OM rotieren, so folgt aus dem Satz 2 der

Satz 5. Jede Kugel, die nicht durchs Inversionszentrum geht, bildet sich in eine ebensolche Kugel ab.

Ebenso erhält man nach Fig. 42 den

Satz 6. Jede Kugel, die durch zwei inverse Punkte geht, fällt mit ihrem

Bild zusammen, oder jede zur Inversionskugel orthogonale Kugel fällt mit dem Bild zusammen.

Endlich soll bewiesen werden

Satz 7. Die räumliche Abbildung ist winkeltreu.

Beweis. In Fig. 47 sei O das Inversionszentrum, P und P' seien entsprechende Punkte. Durch P gehe eine Raumkurve Γ (nicht gezeichnet), Q sei ein Nachbarpunkt von P auf Γ, und Q' sein Bild. Γ', das Bild von Γ, geht dann durch P' und Q'. Sei wie in Fig. 45 $\sphericalangle POQ$ mit ω bezeichnet, so ist nach (6)

$$\sphericalangle Q'P'P = \sphericalangle OPQ + \omega. \quad (7)$$

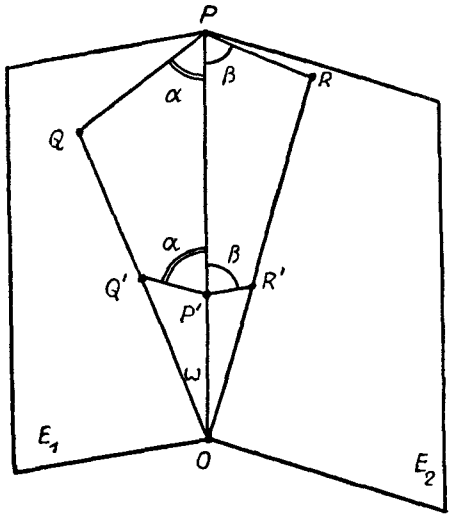

Fig. 47

Nun rücke Q auf Γ gegen P, dann nähert sich (s. oben) der Winkel OPQ immer mehr dem Winkel, den die Tangente in P an Γ mit OP bildet. Q' wandert dabei auf Γ' gegen P', ω wird immer kleiner, und die Ebene $OPQ = E_1$ nähert sich der Ebene, die durch OP und die Tangente in P an Γ bestimmt ist. In der Grenze ist $\omega =$ Null: die Tangenten in P und P' liegen in einer Ebene durch OP (Grenzlage von E_1) und bilden mit OP dieselben Winkel. Wir fassen die Fig. 47 jetzt so auf, als ob der Grenzübergang bereits vollzogen wäre, daß also PQ und $P'Q'$ die Tangenten an Γ und Γ' sind; dann sind die mit α bezeichneten Winkel einander gleich. Entsprechend seien in der Ebene E_2, die auch durch OP gehe, PR und $P'R'$ zwei entsprechende Tanten an zwei sich entsprechende Kurven Γ_1 und Γ_1', dann sind die mit β bezeichneten Winkel einander gleich. Jetzt sind aber die Dreikante $P(QRP')$ und $P'(R'PQ')$ entsprechend gleich, indem sie zwei Seiten (α und β) und den eingeschlossenen Winkel, nämlich den Winkel der Ebenen E_1 und E_2, entsprechend gemein haben. Es ist also auch

$$\sphericalangle QPR = \sphericalangle Q'P'R',$$

w. z. b. w.

Zur ebenen Inversion zurückkehrend, wollen wir einige Beispiele geben.

Wir betrachten zuerst das System konzentrischer Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt A vom Inversionszentrum O verschieden sei und die gemeinsamen Radien aus A und suchen ihre Bilder. Die Geraden

aus A gehen nach Satz 1 in Kreise über, die durch O und A', das Bild von A gehen; zu ihnen gehört auch die Gerade OA: man erhält also ein Büschel von Kreisen mit den reellen Grundpunkten O und A'. Die konzentrischen Kreise gehen nach Satz 2 wieder in Kreise über mit Ausnahme des Kreises, der durch O geht; dieser geht in eine Gerade über. Weil aber die konzentrischen Kreise die Radien senkrecht schneiden, so sind wegen der Winkeltreue die Bilder der konzentrischen Kreise lauter Kreise, welche alle Kreise des Büschels orthogonal schneiden; sie bilden das zum ersten Büschel orthogonale Kreisbüschel.

Entsprechend sieht man, daß die Parallelen zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems bei einer Inversion, für die der Ursprung das Zentrum ist, in Kreise übergehen, die im Zentrum die x-Achse bzw. y-Achse berühren.

An der Hand der Fig. 44 hat sich ergeben, daß aus dem nicht durch O gehenden Kreis K durch Inversion an J der Kreis K' (Fig. 48) hervor-

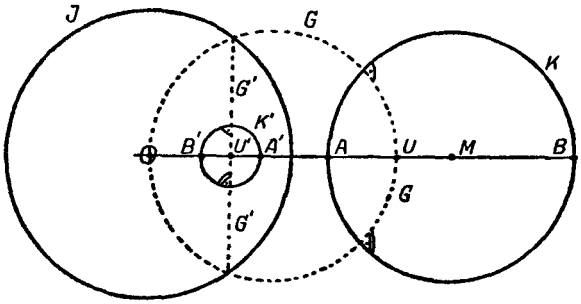

Fig. 48

geht. Wir haben damals die Frage, wie man das Zentrum U' von K' findet, noch offengelassen; diese Frage soll nun beantwortet werden. Wir ziehen durch U' die Gerade G', die auf der gemeinsamen Zentrale $OU'M$ von K und K' senkrecht steht. Das Bild von G' ist ein Kreis G, der durch O und das Bild U von U' geht und in O eine Tangente parallel zu G' hat. G ist also der Kreis über dem Durchmesser OU. Da nun G' und K' sich senkrecht schneiden, so schneidet wegen der Winkeltreue der Inversion auch G den Kreis K senkrecht. Nach dem auf S. 110 Gesagten ist darum U das Bild von O in Beziehung auf K als Inversionskreis, d. h. es ist $MO \cdot MU = (MB)^2$. Man hat so den

Satz 8. Den Mittelpunkt U' des Kreises K', der das Bild des Kreises K ist, erhält man dadurch, daß das Inversionszentrum O an K nach U und dann U an J nach U' gespiegelt wird.

Bemerkung. Bei der Wichtigkeit der Inversion hat man verschiedene sinnreiche Apparate ersonnen, welche die Inversion mechanisch aus-

führen, man nennt sie „Inversoren". Solche haben *Peaucellier, Hart, Sylvester* und *Kempe* angegeben. Ihre Theorie ist sehr einfach und elementar. Wir gehen darauf aber nicht ein, sondern verweisen auf das schöne Werk: *K. Döhlemann*, Geometrische Transformationen, Bd. II. Leipzig 1908, S. 90ff.

§ 21. Zusammenhang der Inversion mit der stereographischen Projektion der Kugel

Die Inversion hängt enge mit einer ebenfalls konformen Abbildung zusammen, nämlich mit der Abbildung der Kugel auf die Ebene, die als *stereographische Projektion* bezeichnet wird und schon *Hipparch* (um 150 v. Chr.) bekannt war.

Man beschreibe um den Punkt O als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius ϱ (Fig. 49) und ziehe einen beliebigen Durchmesser AOA'. Man kann nun jedem Kugelpunkt P einen Punkt P_1 in der durch O senkrecht zu AA' gezogenen Ebene (Äquatorebene) dadurch zuweisen, daß man den Punkt P von A aus auf die Äquatorebene nach P_1 projiziert. Jedem von A verschiedenen Kugelpunkt entspricht so ein einziger im Endlichen gelegener Punkt der Äquatorebene und umgekehrt. Dagegen entspricht *jedem* unendlich fernen Punkt der Äquatorebene derselbe Punkt A. A ist also ein Ausnahmepunkt. Man sagt: *die Kugel ist stereographisch auf die Ebene abgebildet,* und nennt P_1 das Bild von P und ebenso P das Bild von P_1. Wir beweisen nun den

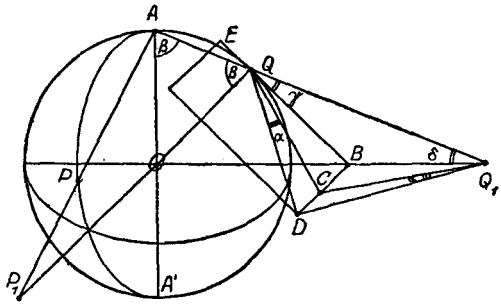

Fig. 49

Satz 1. Die stereographische Projektion ist winkeltreu.

Damit soll gesagt sein, daß zwei Kurven auf der Kugel, die durch P gehen, denselben Winkel bilden wie die projizierten Kurven in P_1, wobei wieder unter dem Winkel der zwei Kurven durch P der Winkel ihrer Tangenten in P verstanden sei.

Beweis. Zunächst sieht man ähnlich wie in § 20 auf Grund einer einfachen Grenzbetrachtung, daß, wenn die Tangente einer durch P gehenden Kugelkurve von A aus auf die Äquatorebene projiziert wird, eine Gerade erhalten wird, die in P_1 die projizierte Kurve berührt.

Nun sei in dem beliebigen Kugelpunkt Q die Tangentialebene E konstruiert, welche die Äquatorebene in der Geraden BCD treffe, weiter seien QC und QD zwei beliebige Geraden von E, welche die Äquator-

ebene in C und D treffen, dann können QC und QD als Tangenten von zwei durch Q gehenden Kugelkurven angesehen werden. Ist Q_1 das Bild von Q, dann sind Q_1C und Q_1D die Tangenten in Q_1 an die projizierten Kurven. Es ist jetzt zu zeigen, daß

$$\sphericalangle CQD = \sphericalangle CQ_1D \tag{1}$$

ist. Die in der Figur mit β bezeichneten Winkel sind gleich, da $OA = OQ$ ist. Da nun $\sphericalangle OQB = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$; ebenso ist $\delta = \frac{\pi}{2} - \beta$, da $\sphericalangle AOQ_1 = \frac{\pi}{2}$. Es ist also $\gamma = \delta$, und darum $BQ = BQ_1$. Da nun BD senkrecht OQ_1 ist, so fällt beim Umklappen der Ebene E um die Gerade BD in die Äquatorebene das Dreieck CQD auf das Dreieck CQ_1D, und die Gleichung (1) besteht, w. z. b. w.

Wir zeigen jetzt, daß jeder Kreis der Kugel in einen Kreis der Äquatorebene abgebildet wird, wobei die Geraden der Ebene ebenfalls als (entartete) Kreise aufgefaßt werden sollen. Von den durch A gehenden Großkreisen der Kugel (Meridiane) und den sie senkrecht treffenden Parallelkreisen sieht man dies unmittelbar: als Bilder in der Äquatorebene erhält man die Strahlen aus O und konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt O. Dies Bild kennt man aus jedem Atlas bei der Abbildung der Polargegenden der Erdoberfläche. Die Bilder der Meridiane und Parallelkreise stehen, wie es sein muß, aufeinander senkrecht. Alle durch A gehenden Kreise haben als Bilder gerade Linien. Ist nun K ein Kreis auf der Kugel (Fig. 50), der nicht durch A geht, und B die Spitze des Tangentenkegels, der die Kugel längs K berührt, ist weiter C ein beliebiger Punkt von K, so sind BC und die Tangente CD in C an K zwei aufeinander senkrecht stehende Kugeltangenten. Projiziert man nun K, CD und CB von A aus in die Äquatorebene nach K_1, C_1D_1 und C_1B_1 (in der Figur ist nur B_1 gezeichnet), so geht CD in die Tangente C_1D_1 in C_1 an K_1 über, und B_1C_1 steht wegen der winkeltreuen Abbildung in C_1 auf C_1D_1 senkrecht. K_1 ist also eine Kurve in der Äquatorebene, welche alle Strahlen aus B_1 in dieser Ebene senkrecht schneidet: K_1 ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkt B_1. Man hat also den

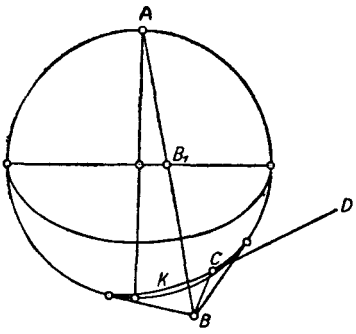

Fig. 50

Satz 2. Bei der stereographischen Projektion geht jeder Kreis der Kugel in einen Kreis über.

Denkt man sich in Fig. 49 Q und seinen Gegenpunkt (vgl. Fig. 51) R als die Pole der Erdkugel, so erhält man als Projektion der Meridiane sämtliche Kreise, die durch die aus A projizierten Pole Q_1 und R_1 gehen,

also ein Kreisbüschel, als Bilder der Parallelkreise erhält man das zugehörige Orthogonalbüschel von Kreisen.

Nun wollen wir den erwähnten Zusammenhang der Inversion und der stereographischen Projektion erörtern.

Zu diesem Zwecke projizieren wir von A aus die zwei Gegenpunkte Q und R (Fig. 51) der Kugel nach Q_1 und R_1, dann ist, weil $\sphericalangle QAR$ als Winkel im Halbkreis ein Rechter ist, in dem rechtwinkligen Dreieck Q_1AR_1

$$OQ_1 \cdot OR_1 = \varrho^2,$$

wenn die Strecken absolut genommen werden. Spiegelt man R_1 an O nach Q_1', so daß also $R_1O = OQ_1'$ ist, so folgt

$$OQ_1 \cdot OQ_1' = \varrho^2,$$

d. h. Q_1' ist in einer Inversion, für die der Äquatorkreis der Inversionskreis ist, das Bild von Q_1. Man hat nun eine Kette winkeltreuer Abbildungen:

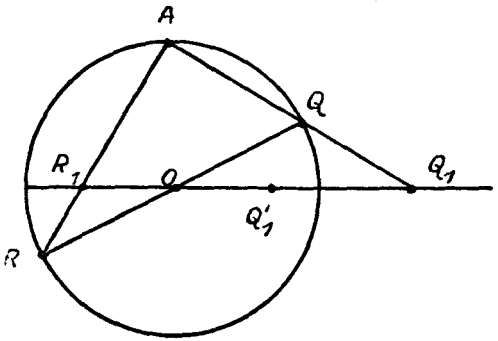

Fig. 51

1. Die Äquatorebene wird von A stereographisch auf die Kugel projiziert, Q_1 geht in Q über.

2. Zu jedem Kugelpunkt Q wird der Gegenpunkt R genommen.

3. Die Kugel wird stereographisch auf die Äquatorebene zurückprojiziert, R geht in R_1 über.

4. Die Äquatorebene wird an O gespiegelt, R_1 geht in Q_1' über.

Dadurch ist die Ebene des Äquators auf sich selbst abgebildet, Q_1 entspricht Q_1', nud zwar, wie sich ergeben hat, in einer Inversion in bezug auf den Äquatorkreis. Damit hat sich ein neuer Beweis dafür ergeben, daß die Inversion eine winkeltreue Abbildung ist. Auch sieht man von neuem ein, daß bei der Inversion ein Kreis (eine Gerade auch als Kreis aufgefaßt) immer in einen Kreis übergeht.

§ 22. Die Zirkelkonstruktionen von Mascheroni

Eines der anziehendsten Kapitel der Elementargeometrie bilden die Konstruktionen geometrischer Aufgaben mit dem Zirkel allein nach der Methode von *Mascheroni*[1]). Nach der klassischen Methode *Euklids* dienen zur Lösung geometrischer Aufgaben Zirkel und Lineal. Man

[1]) *L. Mascheroni*, „Geometria del compasso", Pavia 1797. Vgl. auch *F. Enriques*, „Fragen der Elementargeometrie", II. Tl., 1907, übers. von *H. Fleischer*, S. 28ff.

kann nun fragen: sind für die Lösung immer beide Instrumente erforderlich? Gibt es nicht Aufgaben, die sich mit dem Lineal allein, und solche, die sich mit dem Zirkel allein lösen lassen? Da erweist sich nun der Zirkel als das weitertragende Instrument. Während nämlich mit dem Lineal allein nur ein Teil der mit Zirkel und Lineal lösbaren Aufgaben bewältigt werden kann, so kann man zeigen, daß für sie alle der Zirkel allein ausreicht. Dies soll im folgenden nach dem Vorgange von *Adler*[1]) gezeigt werden. Als wichtigstes Hilfsmittel dient die Inversion. Wir lösen zuerst einige wichtige Hilfsaufgaben mit dem Zirkel allein.

1. Aufgabe. Eine Strecke AB zu verdoppeln.

Zunächst sei bemerkt, daß alle Geraden, die in den folgenden Figuren gezogen sind, nicht zu Konstruktionen, sondern nur zu Beweisen gehören.

Lösung. Man beschreibe (Fig. 52) um B mit dem Radius AB einen Kreis und trage in ihn AB von A aus dreimal als Sehne (AC, CD, DE) ein, dann liegen A, B und E in gerader Linie, und AB ist gleich BE, weil A und E gegenüberliegende Ecken eines dem Kreis einbeschriebenen regulären Sechsecks sind. Nun kann auch AB verdreifacht, vervierfacht usw. werden.

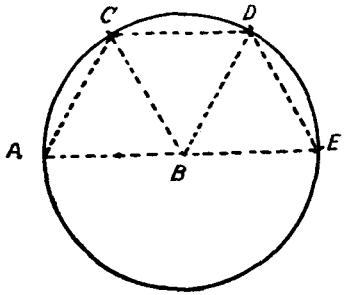

Fig. 52

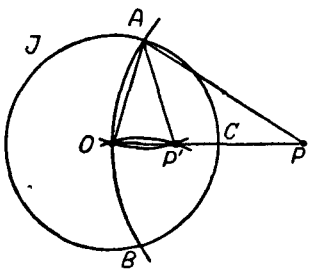

Fig. 53

2. Aufgabe. Zu einem Punkt P den inversen P' mit Hilfe des Zirkels allein zu finden.

Ist O das Inversionszentrum, J der Inversionskreis, so beschreibe man um P mit Radius PO den Kreis, der J in A und B trifft. Die Kreise um A und B mit Radius OA schneiden sich außer in O in einem zweiten Punkt P': er ist das Bild von P; denn, da OP Symmetrielinie der Figur ist, so liegt P' auf OP, und weil die beiden gleichschenkligen Dreiecke OPA und OAP' den Winkel bei O gemeinsam haben, so sind sie ähnlich, und es ist

$$OP:OA = OA:OP' \qquad \text{oder} \qquad OP \cdot OP' = OA^2 = \varrho^2.$$

[1]) *A. Adler*, „Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen", Wiener Berichte 99, 1890.

Wenn der Punkt P von O einen Abstand kleiner als $\frac{1}{2}OA$ hat, versagt die Konstruktion. P' sei ein solcher Punkt. Man bedenke dann, daß aus $OP' \cdot OP = \varrho^2$ folgt

$$mOP' \cdot \frac{OP}{m} = \varrho^2,$$

wo m eine ganze positive Zahl ist. Nach der Aufgabe 2 nehme man also das m-fache von OP', suche den inversen Q des Endpunkts Q' und nehme dann das m-fache von OQ und erhält so den Punkt P.

Aufgabe 3. Von einer Strecke OC (Fig. 53) *den k-ten Teil zu konstruieren.* Ist $OP = kOC$ und ist P' der inverse von P, so ist $OP' = \frac{OC}{k}$; denn es ist $\frac{OC}{k} \cdot kOC = OC^2$.

Aufgabe 4. Von einer Geraden G, die nicht durchs Inversionszentrum O geht, sind zwei Punkte A und B gegeben, es soll der Bildkreis G' von G mit dem Zirkel allein gefunden werden.

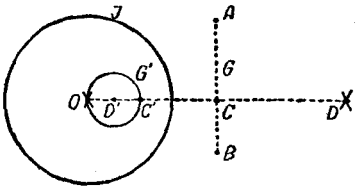

Fig. 54

Man beschreibe um A mit Radius OA und um B mit Radius OB den Kreis, beide schneiden sich außer in O noch in dem Punkt D; OD steht dann auf AB senkrecht und würde AB in einem Punkt C, der Mitte von OD treffen. C ist aber unbekannt. Ist C' der inverse von C, also $OC \cdot OC' = \varrho^2$, so wäre der Kreis über OC' als Durchmesser der gesuchte Kreis. Da aber C unbekannt ist, so ist es auch C'. Aus $OC \cdot OC' = \varrho^2$ folgt aber $2OC \cdot \frac{OC'}{2} = \varrho^2$ oder $OD \cdot \frac{OC'}{2} = \varrho^2$; der inverse Punkt D' zu D ist dann der Mittelpunkt von G'.

Aufgabe 5. Gegeben sei der Kreis K, der nicht durch das Inversionszentrum O gehe mit dem Mittelpunkt M, es soll mit dem Zirkel allein sein Bild K' gesucht werden.

Nach § 20, Satz 8 (Fig. 48) kann der Mittelpunkt U' leicht konstruiert werden, konstruiert man dann noch für einen Punkt A auf K sein Bild A', so ist der Kreis um U' als Mittelpunkt und mit dem Radius $U'A'$ der gesuchte.

Aufgabe 6. Zwei Gerade G und H sind durch je zwei Punkte A, B bzw. C, D gegeben, ihr Schnittpunkt U soll ohne Benutzung des Lineals gefunden werden.

Man nehme einen beliebigen Kreis als Inversionskreis, so aber daß sein Mittelpunkt O weder auf G noch auf H liegt. Suche nach Aufgabe 4 die Bildkreise G' und H' von G und H. G' und H' bestimmen außer O einen Punkt U': sein Bild ist U.

Aus der Lösung der Aufgabe 5 kann man *eine Methode herleiten, die es gestattet, jede mit dem Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe A auch mit dem Zirkel allein zu lösen.*

Die Aufgabe A wird darin bestehen, daß gewisse Punkte, Geraden und Kreise gegeben sind, die eine Figur F bilden, und daß eine Anzahl Punkte, Geraden und Kreise gesucht sind, die eine Figur Φ bilden. Die Konstruktion mittels *Zirkel und Lineal* erfolgt nun so, daß durch Verbinden von Punkten, Schneiden von Geraden und Kreisen aus F nach ganz bestimmter Vorschrift (K) Φ abgeleitet wird. Nun nehme man einen Kreis J als Inversionskreis, dessen Zentrum O mit keinem der gegebenen Punkte, Geraden und Kreise und auch mit keinem der Elemente, die während der Konstruktion auftreten, inzident ist. Jetzt suche man zu den gegebenen Elementen von F die inversen, was mit dem Zirkel allein geschehen kann und erhält so eine Figur F', die nur aus Punkten und Kreisen besteht. Von allen Elementen, die bei der Konstruktion K auftreten, suche man die inversen und erhält so eine Konstruktion K', die nur Kreise benutzt und die aus F' eine Figur Φ' erzeugt. Das Bild von Φ' wird dann die gesuchte Figur Φ geben. Damit hat man den

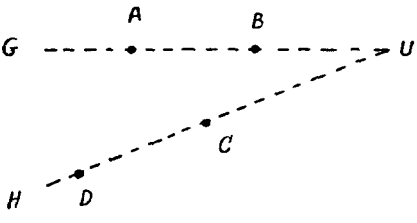

Fig. 55

Satz von Adler. Jede Aufgabe, die mit dem Zirkel und Lineal lösbar ist, kann auch mit dem Zirkel allein gelöst werden.

Es ist nützlich, den allgemeinen Gedankengang auf eine oder mehrere spezielle Aufgaben anzuwenden, etwa auf die Konstruktion des Höhenschnittpunkts eines Dreiecks oder auf die Konstruktion des umbeschriebenen Kreises usw.

Bemerkung. Zum Beweis des *Adler*schen Satzes haben wir die Inversion benutzt. Die so sich ergebende Lösung der Aufgabe A mit dem Zirkel allein wird vielfach kompliziert ausfallen; in einzelnen Fällen wird es darum sehr wohl möglich sein, auf anderem Wege eine einfachere Lösung zu finden.

§ 23. Anallagmatische Kurven und Flächen

In § 20 hat sich ergeben, daß bei der Inversion ein zum Inversionskreis J orthogonaler Kreis in sich selbst übergeht. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß es in der Ebene des Inversionskreises unendlich viele Kurven gibt, die mit ihren Bildern zusammenfallen — man nennt sie *anallagmatische* Kurven; ihre Punkte sind paarweise zueinander invers. Wir wollen jetzt zeigen, daß jede solche Kurve als Enveloppe eines Systems von zu J orthogonalen Kreisen erzeugt werden kann. Ist nämlich P ein Punkt einer anallagmatischen Kurve Γ, so liegt auch das

Bild P' von P auf Γ. Nach § 20 sind alle Kreise des Büschels mit den Grundpunkten P und P' orthogonal zum Inversionskreis J. Unter diesen Kreisen gibt es einen Kreis K, der Γ in P berührt; es ist leicht zu sehen, daß K auch Γ in P' berührt. Sind nämlich P und Q zwei Nachbarpunkte einer beliebigen Kurve γ, so transformieren sich alle Kreise, die durch P und Q gehen, in Kreise, die durch P' und Q' von γ' gehen. Rückt Q gegen P, dann rückt auch Q' gegen P'. Alle Kreise, die γ in P berühren, haben also als Bilder Kreise, die γ' in P' berühren. Ganz allgemein gehen zwei in P sich berührende Kurven in zwei in P' sich berührende Kurven über. Die Inversion ist eine „Berührungstransformation". Der oben definierte Kreis K berührt also die anallagmatische Kurve Γ in P und P'. Nun wandere P auf Γ, dann erhält man eine einfach unendliche Schar von zum Inversionskreis orthogonalen Kreisen K, deren Enveloppe Γ ist. Der Ort der Kreismittelpunkte heiße die *Leitkurve*.

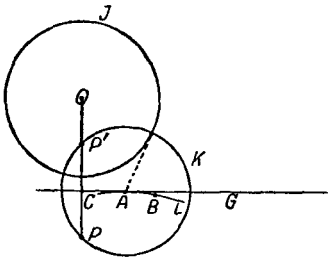

Fig. 56

Wählt man die Leitkurve beliebig, so ist dadurch die Orthogonalschar K bestimmt. Besitzt die Kreisschar eine Enveloppe, so ist diese eine anallagmatische Kurve, wie aus dem Obigen folgt.

Der einfachste Fall ist der, daß die Leitkurve eine Gerade G ist. Alle Kreise K, deren Mittelpunkte auf G liegen und J orthogonal treffen, bilden ein Kreisbüschel: seine Grundpunkte P und P' sind reell, wenn G den Inversionskreis nicht trifft. Man erhält sie so: Um den beliebigen Punkt A von G als Mittelpunkt beschreibe man den zu J orthogonalen Kreis K: das Lot von O auf G schneidet aus K die Punkte P und P' aus; sie liegen symmetrisch zu G. Ist nun G Tangente an die *beliebige* Leitkurve L, so ist leicht einzusehen, daß P und P' Punkte der anallagmatischen Kurve Γ sind, und daß der Kreis K die Kurve Γ in P und P' berührt. Ist nämlich B ein Nachbarpunkt von A der Leitkurve, so schneidet der zu B gehörige Orthogonalkreis den Kreis K in zwei zu J inversen Punkten Q, Q', so daß OQQ' senkrecht zur Geraden AB stehen, und QQ' symmetrisch zur Geraden AB liegen. Rückt nun B auf der Leitkurve gegen A, so sind die Grenzlagen von Q, Q' Punkte der Enveloppe Γ. Die Gerade AB geht aber beim Grenzübergang in die Gerade G über, und darum gehen Q, Q' in P, P' über, was zu zeigen war. Damit ist ein sehr einfaches Mittel gegeben, aus der Leitkurve die anallagmatische Kurve zu zeichnen. Die Normalen in P und P' für die anallagmatische Kurve schneiden sich in A.

Die räumliche Inversion führt zu ähnlichen Betrachtungen; dabei können wir uns kürzer fassen. Nach Satz 6 des § 20 geht jede zur Inversionskugel J orthogonale Kugel bei der Inversion in sich über.

Außer den Orthogonalkugeln gibt es noch unendlich viele Flächen, die bei der Inversion in sich übergehen, sie heißen *anallagmatische Flächen*; ihre Punkte sind paarweise zueinander invers. Ist P ein Punkt einer solchen Fläche F, so liegt auch das Bild P' von P auf F. Unter den Orthogonalkugeln zu J durch die Punkte P und P' wird eine sein (K), die F in P berührt, diese berührt dann auch F in P'; denn durch ganz ähnliche Schlüsse wie oben erkennt man, daß die räumliche Inversion eine Berührungstransformation ist, also zwei sich berührende Flächen in zwei ebensolche überführt. Zu jedem Punkt P von F gehört so eine Kugel K. Der Ort der Mittelpunkte der Kugeln K wird eine Fläche (in besonderen Fälle eine Kurve, s. unten) sein, wir nennen die sie Leitfläche (Leitkurve). Man sieht wie oben ein, daß die Leitfläche beliebig sein kann, und daß die Enveloppe der zugehörigen Orthogonalkugeln, wenn sie existiert, eine anallagmatische Fläche F ist. Ganz ähnlich wie oben kann man aus der Leitfläche die Fläche F punktweise konstruieren.

Ist die Leitfläche in eine Kurve degeneriert, so gibt es nicht ∞^2, sondern nur ∞^1 Kugeln, die ihre Mittelpunkte auf dem Leitgebilde haben und die Kugel J orthogonal schneiden: diese Kugeln berühren dann die zugehörige Fläche F nicht bloß, wie im allgemeinen Falle, in zwei Punkten P und P', sondern längs eines ganzen Kreises. Die anallagmatische Fläche ist dann eine sogenannte *Kanalfläche*.

Ein ganz besonders interessanter Fall entsteht, wenn im speziellen die Leitkurve ein Kegelschnitt ist, man gelangt so zu den *Dupinschen Zykliden*. Ihnen wollen wir den nächsten Paragraphen widmen.

§ 24. Elementargeometrische Behandlung der Dupinschen Zykliden

Zu den *Dupin*schen Zykliden kann man auf sehr verschiedene Arten gelangen[1]).

Dupin[2]) ging von drei Kugeln aus und suchte alle Kugeln, welche die drei gegebenen Kugeln berühren, die Enveloppe nannte er eine Zyklide.

Sehr einfach (*Liouville*) erhält man auch die Zykliden durch Inversion eines Drehkegels und durch Herstellung der Parallelflächen der so entstehenden Hornzyklide[3]) (s. weiter unten). Fragt man nach denjenigen Flächen, für die jeder der beiden Mäntel der Zentrafläche in eine Kurve ausartet, so findet man, daß diese Kurven zwei Fokalkegelschnitte sind (s. weiter unten), und daß die zugehörigen Flächen *Dupin*sche Zykliden sind[4]).

[1]) Man vgl. hierzu die Enzykl. d. math. Wiss. Bd. III_3, Heft 2—3, S. 290 ff., wo die verschiedenen Arten der Erzeugung der *Dupin*schen Zykliden angeführt werden.

[2]) *Ch. Dupin*, „Applications de géométrie et de mécanique à la marine et aux ponts et chaussées. Paris 1822, S. 200 ff.

[3]) Siehe z. B. *V. u. K. Kommerell*, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, Bd. II, 4. Aufl., 1931, S. 123 ff.

[4]) *V. u. K. Kommerell*, Allg. Theorie der Raumkurven und Flächen, Samml. Schubert, Bd. II, 2. Aufl., 1911, S. 45 ff.

Den klarsten Einblick in die schönen Eigenschaften der *Dupin*schen Zykliden ergibt aber die elementargeometrische Behandlung[1]). Zugleich werden wir so auf natürliche Weise zu den wichtigsten Erzeugungsweisen der *Dupin*schen Zykliden geführt. Ich führe von der genannten Arbeit einige Sätze der Einleitung wörtlich an: „Eine sehr einfache und anschauliche Erzeugung gibt *W. Roberts*[2]), die der folgenden Untersuchung zugrunde gelegt werden soll. Es scheint nun bisher noch nicht bemerkt worden zu sein — auch *Roberts* verfährt in dem genannten Aufsatz im wesentlichen analytisch —, daß sich alle die schönen Eigenschaften der Zyklide sehr einfach rein elementargeometrisch ableiten lassen. Dies soll im folgenden ausgeführt werden. Die Beweise sind so einfach und übersichtlich, daß man alles sehr gut in unseren höheren Schulen etwa nach Abschluß der Prüfungen im Zusammenhang durchnehmen kann. Ich behandle im Unterricht auch sonst gerne größere in sich abgeschlossene Probleme und habe gefunden, daß sie das Interesse ungemein wecken und nützlicher sind als viele kleine Einzelaufgaben, die, wie es leider in der Elementarmathematik noch vielfach der Fall ist, oft gekünstelt und ohne allgemeineres mathematisches Interesse sind. Wenn wir Lehrer gerade den letzteren Gesichtspunkt mehr zur Leitschnur der Auswahl des Unterrichtsstoffs in der Elementarmathematik nehmen würden, so würden gewiß sehr viel abgeschmackte und veraltete Aufgaben für alle Zeiten in der Versenkung verschwinden. Dadurch würde der Elementarmathematik durchaus kein Schaden, sondern ein großer Nutzen erwachsen"[3]).

1. Definition der Hornzyklide

Gegeben seien zwei sich schneidende Kreise (Fig. 57) mit gleich großen Radien und den Mittelpunkten M, M_1. Durch den Mittelpunkt O der gemeinsamen Sehne K_1K_2 ziehe man einen beliebigen Strahl, welcher die beiden Kreise auf derselben Seite von K_1K_2 in A und A_1 schneiden möge. Über AA_1 als Durchmesser werde der Kreis beschrieben und um AA_1 gedreht, bis seine Ebene senkrecht zur Ebene der gegebenen Kreise steht. Der Ort aller dieser „erzeugenden" Kreise bildet eine Fläche, welche als *Dupinsche Hornzyklide* bezeichnet werde.

Von dieser Hornzyklide läßt sich sehr einfach ein Modell herstellen: Man zeichne die beiden Kreise auf Karton, schneide längs AA_1 einen Schlitz in ihn und stecke durch diesen Schlitz eine Kreisscheibe aus Karton mit dem Durchmesser AA_1.

[1]) *K. Kommerell*, Elementargeometrische Behandlung der *Dupin*schen Zyklide, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. XLIX, Heft 2, 1918, S. 79ff.

[2]) *W. Roberts*, Paris, Comptes rendus 53 (1861) p. 799f.

[3]) Ich habe dies 1912 geschrieben; heute, 1936, muß ich zugeben, daß in den letzten zwanzig Jahren an der Umgestaltung des Unterrichts in der Elementarmathematik sehr viel nützliche Arbeit geleistet worden ist.

Die Fläche besitzt in K_1 und K_2 zwei Knotenpunkte oder „Hörner", daher der Name Hornzyklide. Nimmt man die Gerade K_1K_2 als x-Achse, MM_1 als z-Achse und die Gerade, die in O auf der xz-Ebene senkrecht steht, als y-Achse, so sieht man unmittelbar, daß die Zyklide symmetrisch zu den drei Ebenen der Achsen liegt. O selbst ist Mittelpunkt der Fläche. Die Fläche enthält unendlich viele Kreise, jede Ebene durch die y-Achse schneidet zwei Kreise aus der Fläche heraus, wir wollen die Gesamtheit aller dieser Kreise als *erste Kreisschar* bezeichnen.

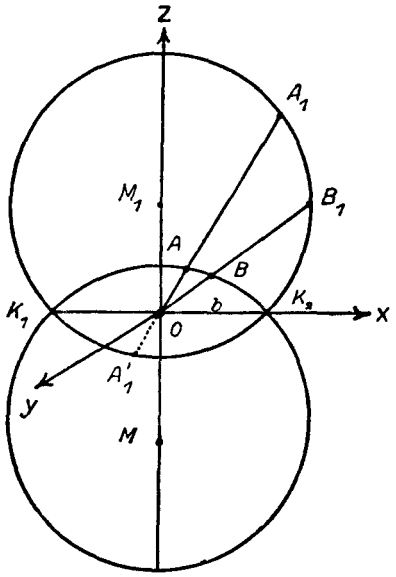

Fig. 57

Verlängert man AO über O bis zum zweiten Schnitt A_1' mit dem Kreis um M_1, so ist aus Symmetriegründen

$$OA = OA_1',$$

und weiter nach dem Sehnensatz

$$OA_1' \cdot OA_1 = OK_2^2 = b^2$$

also

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = b^2, \qquad (1)$$

wo $OK_2 = OK_1$ mit b bezeichnet wurde. Heißt man die Punktpaare AA_1, BB_1, usw. entsprechende Punkte, so kann man (1) auch so formulieren: entsprechende Punkte sind invers in Beziehung auf den Kreis über dem Durchmesser K_1K_2 als Inversionskreis. Zieht man in der Ebene eines Kreises der ersten Schar, etwa dem über AA_1, von O aus einen Strahl, der den Kreis in P und P_1 treffe, so folgt nach dem Sekantensatz

$$OP \cdot OP_1 = OA \cdot OA_1 = b^2.$$

Man hat so den

Satz 1. Für die um O mit Radius b beschriebene Kugel als Inversionskugel ist die Zyklide zu sich selbst invers; die Zyklide ist eine anallagmatische Fläche.

Aus (1) folgt weiter

Satz 2. Irgend zwei Paare von zugeordneten Punkten AA_1, BB_1 bilden ein Kreisviereck.

Dieser Satz ergibt sich auch unmittelbar daraus, daß O ein Ähnlichkeitspunkt für die beiden Kreise um M und M_1 ist. Man beschreibe nun um das Kreisviereck AA_1BB_1 den Kreis (Fig. 58); AB, A_1B_1, K_1K_2 sind die Schnittsehnen von je zweien der Kreise in Fig. 58 und

gehen daher nach einem bekannten Satz durch einen Punkt: d. h. AB und A_1B_1 schneiden sich in einem Punkt C der x-Achse. Dies ergibt sich übrigens auch leicht mit Hilfe des Sekantensatzes direkt. Man drehe nun OB gegen OA hin, dann gehen AB und A_1B_1 allmählich in die Tangenten in A und A_1 an die gegebenen Kreise über. Man hat also den

Satz 3. Die Tangenten an die gegebenen Kreise in entsprechenden Punkten (D, D_1) schneiden sich auf der x-Achse (in E) und sind gleich lang $(DE = D_1E)$. Letzteres folgt unmittelbar aus dem Tangentensatz.

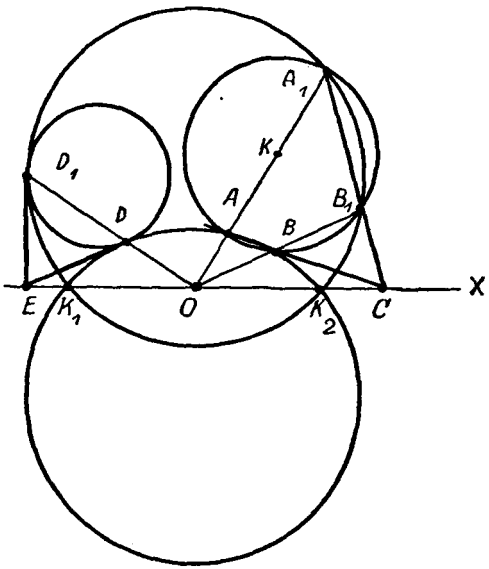

Fig. 58

Nun beschreibe man um den Mittelpunkt K des Kreises, der durch die vier Punkte $AB\,A_1B_1$ bestimmt ist, eine Kugel mit dem Radius dieses Kreises, so liegt der erzeugende Kreis über AA_1 und der über BB_1 ganz auf dieser Kugel; denn die Ebene z. B. durch AA_1 senkrecht zur xz-Ebene schneidet aus jener Kugel einen Kreis aus, für den AA_1 Durchmesser ist. Es gilt also der

Satz 4. Zwei beliebige Kreise der ersten Schar liegen auf einer Kugel.

Den erzeugenden Kreis über AA_1 projiziere man aus C und erhält so einen Kegel. Dieser Kegel schneidet die soeben betrachtete Kugel außer in dem erzeugenden Kreis über AA_1 noch in dem erzeugenden Kreis über BB_1; denn da BB_1 mit AA_1 ein Kreisviereck bildet, so ist die Ebene des Kreises über BB_1 eine Wechselschnittebene für den Kegel und schneidet daher aus diesem einen Kreis aus; dieser Kreis ist aber der erzeugende Kreis über BB_1, da die xz-Ebene für den Kegel Symmetrieebene ist. Man hätte auch so schließen können: Ist für eine Inversion C das Zentrum, und ist der Radius r der Inversionskugel bestimmt durch $r^2 = CA \cdot CB = CA_1 \cdot CB_1$, so wird die obige Kugel in sich übergeführt, der erzeugende Kreis über AA_1 in einen Kreis dieser Kugel, der durch BB_1 geht und wieder aus Symmetriegründen nur der erzeugende Kreis über BB_1 sein kann. Man hat so den

Satz 5. Irgend zwei Kreise der ersten Schar lassen sich durch Zentralprojektion ineinander überführen; das jeweilige Projektionszentrum (C)

liegt auf der x-Achse. Die Achse der Perspektivität ist die Schnittlinie der beiden Kreisebenen, d. h. die y-Achse.

Wir drehen nun wiedcr OBB_1 um O immer mehr in die Lage OAA_1. Der Kreis um das Viereck ABA_1B_1 geht dann in der Grenze in einen Kreis über, der die gegebenen Kreise in A und A_1 berührt, siehe in der Fig. 58 DD_1. Die Kugel des Satzes 4 geht in eine Kugel über, die diese Zyklide längs des Kreises über AA_1 berührt, und jener Kegel aus C berührt die Zyklide ebenfalls längs dieses Kreises. Man hat also den

Satz 6. Die Zyklide ist Enveloppe einer Schar von Kugeln (erste Schar von Berührungskugeln) und gehört daher zur Gattung der Kanalflächen (§ 23). Jede Kugel der Schar berührt die Zyklide längs eines erzeugenden Kreises der ersten Schar.

Zieht man für die Kugel, welche die Zyklide längs des erzeugenden Kreises berührt, die Kugelradien nach den Punkten dieses Kreises, so sind diese Radien die Normalen der Zyklide längs des Kreises und bilden einen Drehkegel. Nennt man auf einer Fläche eine Kurve, längs der die Flächennormalen eine abwickelbare Fläche bilden, eine *Krümmungslinie* der Fläche, so hat man den

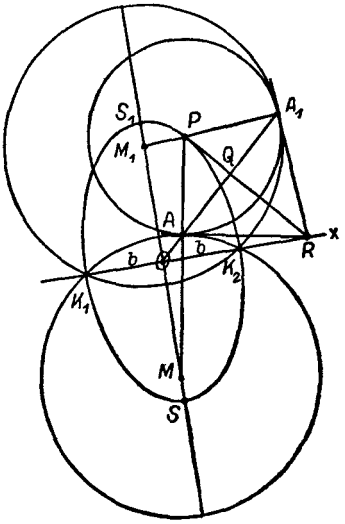

Fig. 59

Satz 7. Die Kreise der ersten Schar sind Krümmungslinien der Zyklide.

Wenn in der Fig. 58 der erzeugende Kreis über BB_1 immer mehr sich dem erzeugenden Kreis über AA_1 nähert, so geht der Kegel des Satzes 5, der den Kreis BB_1 in den Kreis AA_1 projiziert, in der Grenze in einen Kegel über, der die Zyklide längs des Kreises AA_1 berührt (Fig. 59); seine Spitze R liegt auf der x-Achse und, da nach Satz 3 $AR = A_1R$ ist, so ist dieser Berührungskegel ein Drehkegel. Seine Spitze R ist der Schnitt des Mittellots PQR zu AA_1 mit der x-Achse. Dieser Kegel berührt auch die Berührungskugel der Zyklide längs des Kreises AA_1. Beschreibt man nun um R eine Kugel mit dem Radius RA, so wird diese Kugel jene Berührungskugel und darum auch die Zyklide in allen Punkten des Kreises AA_1 senkrecht schneiden. Es gilt also der

Satz 8. Es gibt eine (erste) Schar von Kugeln, welche die Zyklide orthogonal schneiden; ihre Mittelpunkte liegen auf der x-Achse.

Diese Orthogonalkugeln bilden ein Kugelbüschel: sie stellen die Gesamtheit der Kugeln dar, welche alle Kugeln, die durch K_1 und K_2

gehen (Kugelbündel), senkrecht schneiden; dies folgt unmittelbar aus dem Tangentensatz ($RA^2 = RK_1 \cdot RK_2$ usw.).

Läßt man in Fig. 59 die Basis AA_1 des Berührungsdrehkegels mit der Spitze in R immer näher an den Knotenpunkt K_2 herankommen, so findet man durch einen Grenzübergang, daß die Flächentangenten der Zyklide in K_2 und ebenso in K_1 einen Drehkegel bilden, dessen Drehachse parallel zur z-Achse geht.

Nunmehr wenden wir uns zur Betrachtung des geometrischen Orts der Mittelpunkte der Berührungskugeln (Leitkurve des § 23). Der Mittelpunkt P der Kugel, welcher die Zyklide längs des erzeugenden Kreises AA_1 berührt, ist offenbar der Mittelpunkt des Kreises, der die gegebenen Kreise (M, M_1) in A und A_1 berührt, also der Schnittpunkt der Radien MA und M_1A_1. Nun ist

$$\begin{aligned} M_1P + MP &= M_1P + MA + AP = M_1P + MA + A_1P \\ &= MA + M_1A_1 = 2a, \\ M_1P + MP &= 2a, \end{aligned}$$

wenn a der Radius der gegebenen Kreise (M, M_1) ist. Es folgt so der

Satz 9. Der Ort der Mitten der Berührungskugeln der ersten Schar (Leitkurve) *ist eine Ellipse, für die M und M_1 die Brennpunkte sind, a die große, $b = K_1O$ die kleine Halbachse ist; die Scheitel sind die Knotenpunkte K_1, K_2, und die Mitten S_1, S derjenigen erzeugenden Kreise der ersten Schar, die in der yz-Ebene liegen. Diese Ellipse soll die Fokalellipse heißen.*

Damit sind wir zu der am Schluß des § 23 gegebenen Definition der Zykliden gelangt. Fällt man in der Figur 59 von P auf AA_1 das Lot, so geht es durch die Mitte Q von AA_1 und halbiert den Winkel APA_1, da ja $PA = PA_1$ ist; außerdem geht dieses Lot durch die Spitze R des Drehkegels, welcher die Zyklide längs des erzeugenden Kreises AA_1 berührt, ist also die Drehachse des Kegels. Da so PQ den Winkel der Brennstrahlen M_1P und MP der Fokalellipse halbiert, so ist PQR in P Tangente an die Fokalellipse, und man hat daher den

Satz 10. Der Ort der Mittelpunkte Q der Kreise der ersten Schar der Zyklide ist die Fußpunktskurve der Fokalellipse mit O als Pol. Die Enveloppe der Kegelachsen aller Berührungskegel der ersten Schar ist die Fokalellipse.

Die Strahlen von P nach den Punkten des Kreises AA_1 sind nach Satz 6 die Flächennormalen der Zyklide längs AA_1. Es gilt also der

Satz 11. Die Zyklidennormalen längs eines erzeugenden Kreises AA_1 bilden einen Drehkegel, dessen Spitze P auf der Fokalellipse liegt, und dessen Achse die Ellipsentangente in P ist. Alle Zyklidennormalen treffen die Fokalellipse.

Benutzt man die Sprechweise der Theorie der Strahlensysteme, so kann man sagen, daß der eine Brennflächenmantel (erster Mantel der Zentralfläche) des Strahlensystems der Zyklidennormalen in die Fokalellipse ausgeartet ist (vgl. den Anfang des Paragraphen).

2. Zweite Schar von erzeugenden Kreisen, Berührungskugeln, Berührungskegeln und Orthogonalkugeln

Wir wollen nun zeigen, daß auf der Zyklide eine zweite Schar von Kreisen existiert, für die ähnliche Sätze gelten wie für die erste Schar.

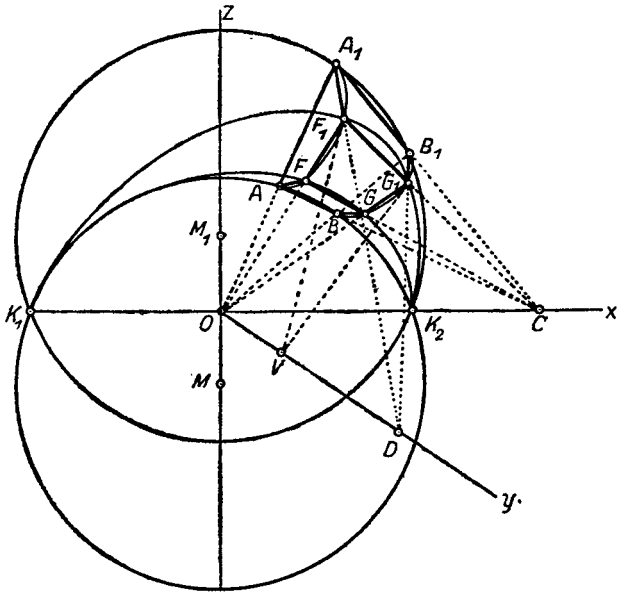

Fig. 60

Diese Kreise werden ausgeschnitten von Ebenen durch die x-Achse, und zwar schneidet jede solche Ebene zwei Kreise aus, die durch die Knotenpunkte gehen. An der Hand der Figur 60 läßt sich dies unschwer zeigen. Es sind hier die Kreise über AA_1 und BB_1 der ersten Schar gezeichnet. Wie oben gezeigt wurde, schneiden sich AB und A_1B_1 in einem Punkt C der x-Achse. Nach Satz 5 wird durch Zentralprojektion aus C der eine Kreis in den andern übergeführt. Man nehme nun auf dem Kreis AA_1 den beliebigen Punkt F an; er gehe durch Projektion aus C in den Punkt G des andern Kreises über. Jetzt schneiden wir die Zyklide mit der Ebene $OFGC$. OF schneidet den Kreis AA_1 zum zweiten Male in F_1; projiziert man jetzt den Punkt F_1 von C aus in die Ebene des zweiten Kreises, so ist diese Projektion der Schnitt von OG und

F_1C; diese Geraden schneiden sich nämlich, da sie in der Ebene OFG liegen. Andererseits muß diese Projektion ein Punkt des Kreises über BB_1 sein, woraus folgt, daß G_1 auf diesem Kreise liegt. Die so entstandene Figur ist dadurch bemerkenswert, daß in ihr *6 Kreisvierecke* enthalten sind, nämlich

$$AA_1B_1B;\quad FF_1G_1G;\quad AFGB;\quad A_1F_1G_1B_1;\quad AFF_1A_1;\quad BGG_1B_1.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 4, da alle diese Vierecke auf der Kugel liegen, welche die beiden Kreise über AA_1 und BB_1 enthält. Wir merken an, daß

die Strahlen AA_1, FF_1, BB_1, GG_1 alle durch O
die Strahlen $AB,\ FG,\ F_1G_1, A_1B_1$ alle durch C

gehen. Es ist nun nach dem Sekantensatz:

$$CF_1 \cdot CG_1 = CA_1 \cdot CB_1 = CK_1 \cdot CK_2,$$

und darum liegen die vier Punkte $K_1K_2F_1G_1$ auf einem Kreis. Die beliebige Ebene $OFGC$ schneidet also die Zyklide in einer solchen Kurve, daß zwei beliebige Punkte von ihr wie F_1, G_1 (OAA_1, OBB_1 können willkürlich gewählt werden!) auf einem Kreis durch K_1K_2 liegen. Durch $K_1K_2F_1$ ist aber ein einziger Kreis bestimmt, und der beliebige Punkt G_1 der Schnittkurve liegt auf diesem. Die Schnittkurve besteht daher aus diesem Kreis. Dieselbe Ebene $OFGC$ schneidet aus der Zyklide einen zweiten Kreis aus, der durch K_1FK_2 geht, wie man ebenso zeigt. Man hat also den

Satz 12. Jede Ebene durch die x-Achse, welche die Zyklide schneidet, schneidet aus ihr zwei Kreise heraus. Diese Kreise sollen die zweite Kreisschar genannt werden. Alle diese Kreise gehen durch die Knotenpunkte.

Man drehe nun die Ebene $y\ OBB_1$ um die y-Achse so, daß sich der Kreis BB_1 immer mehr dem Kreis AA_1 nähert, dann ist die Grenzlage von F_1G_1 die Tangente in F_1 an den Kreis der zweiten Schar durch F_1; F_1G_1 ist aber auch in der Grenze Mantellinie des Drehkegels, welcher die Zyklide längs des Kreises AA_1 der ersten Schar berührt. F_1G_1 steht also in der Grenze senkrecht auf dem Kreis AA_1 der ersten Schar, der durch F_1 geht. Die beiden Kreise der ersten und zweiten Schar, die durch F_1 gehen, schneiden sich also senkrecht. Darum gilt der

Satz 13. Die Kreise der ersten Schar schneiden alle Kreise der zweiten Schar senkrecht.

Nimmt man mit der Zyklide eine Inversion vor, für die einer der Knotenpunkte, etwa K_1, das Zentrum ist, so gehen die Kreise der zweiten Schar in Gerade über, die alle durch das Bild von K_2 gehen, d. h. die Zyklide verwandelt sich in einen Kegel. Wegen der Winkeltreue der Inversion schneiden die Bilder der Kreise der ersten Schar (wieder Kreise) die Kegelmantellinien orthogonal, d. h. das Bild der Zyklide ist ein Drehkegel. So kommt man auf natürliche Weise auf die eingangs erwähnte *Liouville*sche Erzeugung der Hornzyklide.

Man kann die Figur 60 noch etwas allgemeiner auffassen. Eine beliebige Ebene durch die x-Achse schnitt aus den beiden Kreisen über AA_1 und BB_1 der ersten Schar ein Kreisviereck FF_1G_1G heraus, derart, daß FG und F_1G_1 sich in der Kegelspitze C schneiden, von der aus die beiden Kreise durch Zentralprojektion sich ineinander überführen lassen. Legt man durch die x-Achse eine *zweite beliebige* Ebene, so schneidet diese aus den beiden Kreisen der ersten Schar ein entsprechendes solches Viereck heraus. Damit wir nicht noch eine weitere Figur zeichnen müssen, sei dieses Viereck das Viereck ABA_1B_1, so daß also jetzt angenommen werden muß, daß dieses Viereck nicht gerade in der xz-Ebene liegt. AB und A_1B_1 gehen ebenfalls durch C wie FG und F_1G_1. Da nun A_1B_1 und F_1G_1 sich in C schneiden, so ist das Viereck $A_1B_1G_1F_1$ ein *ebenes* Viereck, und A_1F_1 und B_1G_1 schneiden sich in einem Punkt D. D muß aber auf der Schnittlinie der Ebenen der beiden Kreise der ersten Schar, d. h. auf der y-Achse liegen. Nun drehe man die Ebene $y\,OBB_1$ um die y-Achse, dann wandert G_1 auf dem Kreis der zweiten Schar durch F_1, B_1 auf dem Kreis der zweiten Schar durch A_1, und B_1G_1 geht in allen seinen Lagen durch D. Man hat also den

Satz 14. Zwei beliebige Kreise der zweiten Schar lassen sich durch Zentralprojektion ineinander überführen. Das Zentrum der Projektion liegt auf der y-Achse.

Man kann die Figur 60, die so reich ist an geometrischen Beziehungen, wieder in anderer Weise auffassen: Wir zeichnen von dem beliebigen Punkt D der y-Achse aus zwei beliebige Strahlen, welche die Zyklide schneiden. Durch die y-Achse und jeden der beiden Strahlen sind zwei Ebenen bestimmt, welche den über der xy-Ebene liegenden Teil der Zyklide in zwei Kreisen der ersten Schar schneiden. Es seien die in der Figur gezeichneten Kreise. Der erste Strahl möge den zugehörigen Kreis in F_1A_1, der zweite Strahl in G_1B_1 seinen Kreis treffen. Da nun nach Satz 4 die beiden Kreise auf einer Kugel liegen, so folgt mit dem Sekantensatz:

$$DA_1 \cdot DF_1 = DB_1 \cdot DG_1 = \text{const.} = c^2.$$

Diese Konstante c^2 ist offenbar $= (DK_1)^2$. *Für einen beliebigen Punkt D der y-Achse gilt also in Beziehung auf die Zyklide der Sekantensatz, wie wenn die Zyklide eine Kugel wäre.* Oder anders ausgedrückt: ist D Inversionszentrum, DK_1 Radius der Inversionskugel, so geht die Zyklide durch Inversion an dieser Kugel in sich selbst über (vgl. Satz 1). Da weiter

$$CA_1 \cdot CB_1 = CG_1 \cdot CF_1 = CK_1 \cdot CK_2 = d^2 \text{ (const.)}$$

ist, so *gilt ebenso für einen beliebigen Punkt C der x-Achse in Beziehung auf die Zyklide der Sekantensatz, wie wenn die Zyklide eine Kugel wäre.* Oder wieder anders ausgedrückt: Ist C Inversionszentrum, d der Radius der Inversionskugel, so geht die Zyklide durch Inversion an dieser Kugel in sich selbst über.

Satz 15. Jeder Punkt der x- oder y-Achse ist das Zentrum einer Inversion, durch welche die Zyklide in sich selbst übergeführt werden kann.

Die Zyklide ist also in mehrfachem Sinne anallagmatisch.

In Satz 14 hat sich ergeben, daß zwei beliebige Kreise der zweiten Schar durch Zentralprojektion ineinander übergeführt werden können, wobei das Zentrum der Projektion (D in Fig. 60) auf der y-Achse liegt. Nun lasse man den einen Kreis dem andern sich nähern, lasse also z. B. in Fig. 60 den Punkt A_1 auf dem Kreis der ersten Schar immer näher an F_1 heranrücken, so sind in der Grenze A_1F_1 und B_1G_1 Tangenten an die beiden Kreise der ersten Schar in F_1 bzw. G_1; beide Tangenten schneiden sich in einem Punkt V der y-Achse. Die beiden Tangenten VF_1 und VG_1 sind aber als Tangenten an die Kugel, welche nach Satz 4 die beiden Kreise der ersten Schar verbindet, gleich lang. Man hat also den

Satz 16. Konstruiert man in allen Schnittpunkten eines Kreises der zweiten Schar mit den Kreisen der ersten Schar an diese letzteren die Tangenten, so erfüllen diese einen Drehkegel mit der Spitze V auf der y-Achse.

Daß es ein Drehkegel ist, folgt daraus, daß V von allen Punkten des Kreises denselben Abstand hat.

Einen zum Satz 16 entsprechenden Satz erhält man, wenn man die Rollen der beiden Kreisscharen vertauscht, wie aus der Betrachtung, die zu Satz 8 geführt hat, hervorgeht.

Offenbar ist jeder Punkt V der y-Achse Spitze von zwei solchen Berührungskegeln. Nimmt man als Punkt V speziell den Mittelpunkt O, so arten die beiden Kegel in zwei Ebenen aus. Es sind die beiden Ebenen, welche durch die x-Achse und die beiden gemeinsamen inneren Tangenten der beiden größten Kreise der ersten Schar bestimmt sind. Diese beiden Ebenen berühren die Zyklide je längs eines Kreises der zweiten Schar.

Beschreibt man nunmehr um V mit Radius VF_1 eine Kugel, so schneidet sie die Zyklide orthogonal längs des Kreises der zweiten Schar durch F_1 und aus Symmetriegründen noch längs eines zweiten Kreises, der zum ersten symmetrisch in Beziehung auf die xz-Ebene liegt. Man hat also den

Satz 17. Es gibt eine zweite Schar von Kugeln, welche die Zyklide orthogonal schneiden. Diese Kugeln gehen durch die Knotenpunkte, und ihre Mittelpunkte liegen auf der y-Achse (vgl. Satz 8).

Alle Kreise der ersten Schar schneiden eine beliebige dieser Orthogonalkugeln orthogonal, und ebenso stehen alle Kreise der zweiten Schar auf den Orthogonalkugeln des Satzes 8 senkrecht; darum ergibt sich so auf anderem Wege das oben in Satz 15 gefundene Ergebnis, daß die Zyklide durch Inversion an jeder der zwei Scharen von Orthogonalkugeln in sich selbst übergeführt wird.

Da alle Kreise der zweiten Schar durch die Knotenpunkte gehen und durch zwei sich schneidende Kreise immer eine Kugel geht, so folgt der

Satz 18. Zwei beliebige Kreise der zweiten Schar liegen auf einer Kugel (vgl. Satz 4).

Läßt man die beiden Kreise sich einander nähern, so erhält man eine Kugel, welche die Zyklide längs eines Kreises der zweiten Schar berührt, ein Ergebnis, das wir sogleich weiter unten auch ohne Grenzbetrachtung erhalten werden. Es gilt also der

Satz 19. Die Zyklide kann als Enveloppe einer zweiten Schar von Kugeln betrachtet werden (vgl. Satz 6). *Jede Kugel der Schar berührt die Zyklide längs eines Kreises der zweiten Schar. Die Zyklide ist also in zweifacher Weise eine Kanalfläche.*

Dieser Satz führt auf die ursprüngliche, eingangs erwähnte Erzeugungsweise der Zykliden nach *Dupin*. Da z. B. eine Berührungskugel der zweiten Schar alle Berührungskugeln der ersten Schar berührt, so nehme man drei beliebige Kugeln der ersten Schar, dann ist die Zyklide die Enveloppe aller Kugeln (der zweiten Schar), welche die drei ersten Kugeln berühren.

Wir wollen nun noch die Hüllkugeln der zweiten Schar genauer untersuchen. In Fig. 61 sind die beiden Kreise der ersten Schar mit den Mittelpunkten S und S_1, die in der yz-Ebene liegen, gezeichnet; die yz-Ebene wurde hierauf mit diesen Kreisen um die z-Achse in die xz-Ebene gedreht. In der gedrehten yz-Ebene ziehe man durch O einen beliebigen Strahl, der jene Kreise in FG bzw. F_1G_1 schneide. Dann liegen, wenn die yz-Ebene wieder in die ursprüngliche Lage zurückgedreht wird, die Punkte $FF_1K_1K_2$ und ebenso $GG_1K_1K_2$ je auf einem Kreis der zweiten Schar. Denn nach dem Sekantensatz hat man

$$OG \cdot OF = OR \cdot OU = OR \cdot OU_1 = (OK_1)^2,$$

und, da $OG = OF_1$ ist,

$$OF_1 \cdot OF = (OK_1)^2,$$

eine Gleichung, die lehrt, daß in der Tat die vier Punkte (der wieder zurückgedrehten yz-Ebene) $FF_1K_1K_2$ auf einem Kreis der zweiten Schar liegen. Die Tangenten in F und F_1 an die Kreise um S und S_1 treffen sich nach Satz 16 in einem Punkt V der y-Achse. Die Kugel um V als Mittelpunkt und mit dem Radius VF schneidet die Zyklide orthogonal längs des Kreises der zweiten Schar durch F und F_1. V ist auch Spitze des Drehkegels, der die Zyklide längs jenes Kreises berührt. FS und F_1S_1 sind die Normalen des Kegels und zugleich der Zyklide in F und F_1: sie schneiden sich im Punkt P der yz-Ebene, und es ist $PF = PF_1$, weil $VF = VF_1$ ist; VP ist das Mittellot von FF_1. Beschreibt man um P mit dem Radius PF die Kugel, so berührt diese die

Zyklide längs des Kreises durch $FF_1K_1K_2$ der zweiten Schar, weil diese Kugel den Berührungsdrehkegel aus V längs dieses Kreises berührt. Alle Normalen der Zyklide längs dieses Kreises gehen durch P und bilden eine abwickelbare Fläche (Drehkegel). Man hat also den

Satz 20. Die zweite Kreisschar ist die zweite Schar von Krümmungslinien der Fläche (vgl. Satz 7).

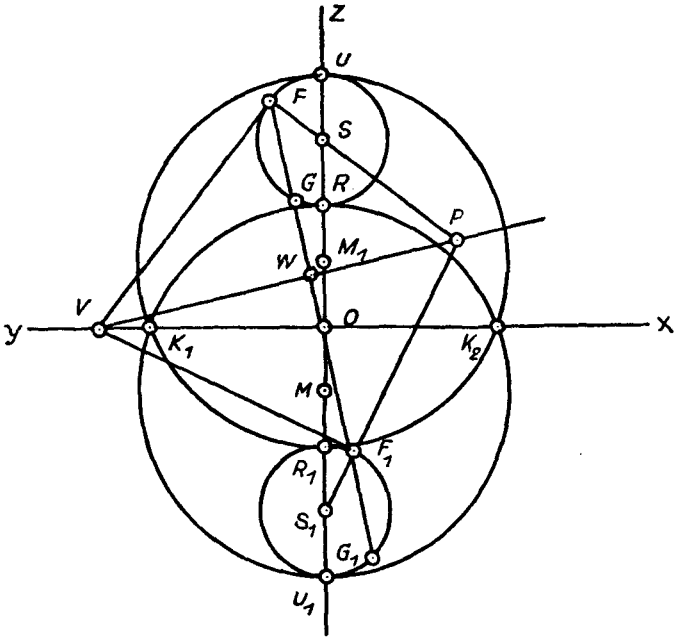

Fig. 61

Die zweite Schar von Krümmungslinien schneidet die erste Schar (Satz 7) nach Satz 13 überall senkrecht, wie es die allgemeine Theorie verlangt.

Wir untersuchen nun den Ort der Mittelpunkte P der Berührungskugeln der zweiten Schar. Es ist

$$PF_1 - PF = 0\,, \qquad (PS_1 - S_1F_1) - (PS + SF) = 0\,,$$

$$PS_1 - PS = 2SF = \text{const.}$$

Der Ort der Punkte P ist also eine Hyperbel in der yz-Ebene mit den Punkten S und S_1 als Brennpunkten. Da $OM_1 = OM = SF$ ist, so sind nach der letzten Gleichung M und M_1 die Scheitel dieser Hyperbel, die wir die *Fokalhyperbel* nennen. Zusammen mit Satz 9 gilt daher der

Satz 21. Der Ort der Mittelpunkte der Berührungskugeln der zweiten Schar ist die Fokalhyperbel in der yz-Ebene. Die Scheitel SS_1 der Fokal-

ellipse in der xz-Ebene sind die Brennpunkte, und die Brennpunkte MM_1 der Fokalellipse sind die Scheitel der Fokalhyperbel.

Alle Flächennormalen treffen die Fokalhyperbel, *also ist auch der zweite Zentramantel der Zyklide in eine Kurve, nämlich eben in die Fokalhyperbel,* entartet (vgl. den Eingang des Paragraphen). Alle Flächennormalen längs des Kreises $FF_1K_1K_2$ gehen durch P und bilden einen Drehkegel, dessen Achse VP ist. Da aber VP (s. oben) als Mittellot von FF_1 den Winkel FPF_1 halbiert, d. h. den Winkel der Brennstrahlen SP und S_1P, so ist VP die Tangente der Fokalhyperbel in P. Da nun nach Satz 11 alle Flächennormalen auch die Fokalellipse treffen, so sind die Normalen der Zyklide die Gesamtheit der Strahlen, welche die Fokalellipse und Fokalhyperbel treffen. — Man hat so (vgl. Satz 11) den

Satz 22. Jeder der Fokalkegelschnitte wird von einem beliebigen Punkt des andern durch einen Drehkegel projiziert, dessen Achse die Tangente in der Kegelspitze an dem betreffenden Kegelschnitt ist (Dupin).

Wir kommen auf die Fokalkegelschnitte noch ausführlich in § 33 zurück und werden zeigen, daß der Satz 22 höchst einfach elementargeometrisch bewiesen werden kann.

Für das „Strahlensystem" der Treffgeraden der Fokalkegelschnitte ist die Hornzyklide eine Orthogonalfläche, weshalb ein solches System ein Normalensystem heißt.

Im nächsten Abschnitt wird sich ergeben, daß es *unendlich viele* Orthogonalflächen gibt: Wir werden so *allgemeinere Hornzykliden* und *weiter Ring- und Spindelzykliden erhalten.*

VP schneidet FF_1 in der Mitte W und steht auf FF_1 senkrecht, da ja die beiden Dreiecke VFF_1 und PFF_1 gleichschenklig sind. Der Punkt W ist offenbar der Mittelpunkt des Kreises $FF_1K_1K_2$ der zweiten Schar. W ist also der Fußpunkt des Lotes aus O auf die Hyperbeltangente VP in P. Man hat also den

Satz 23. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise der zweiten Schar ist die Fußpunktkurve der Fokalhyperbel in Beziehung auf O als Pol. Die Enveloppe der Kegelachsen (VP) aller Berührungskegel der zweiten Schar (Spitze V) ist die Fokalhyperbel (vgl. Satz 10).

Es mag noch bemerkt werden, daß alle Orthogonalkugeln der zweiten Schar durch den Kreis, der über K_1K_2 als Durchmesser in der xz-Ebene beschrieben werden kann, hindurchgehen. *Die Orthogonalkugeln der zweiten Schar bilden also ein Kugelbüschel, und die Orthogonalkugeln der ersten Schar stellen das zugehörige orthogonale Kugelbüschel dar* (vgl. Satz 8).

Die allgemeinen Horn-, Ring- und Spindel-Zykliden

Wir konstruieren nun zu der bisher betrachteten speziellen Zyklide die sog. Parallelflächen und erhalten dann sehr einfach die anderen Formen der Zykliden mit wesentlich denselben Eigenschaften.

In Fig. 62 ist ein Teil der Fig. 59 wiedergegeben. Die gestrichelt gezeichneten Kreise durch K_1 und K_2 sind die Kreise, die zu der speziellen Hornzyklide der obigen Betrachtung geführt haben. OAA_1 gibt den Kreis der ersten Schar über AA_1; MA und M_1A_1 bestimmen den Mittelpunkt P der Berührungskugel, die die Zyklide längs des Kreises AA_1 berührt. Alle Strahlen aus P nach Punkten dieses Kreises sind Zykliden-Normalen, der Ort von P war die Fokalellipse.

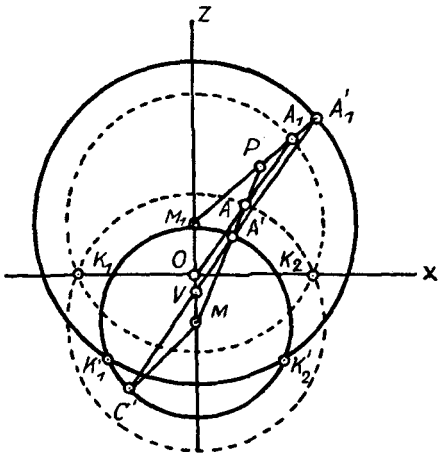

Fig. 62

Nun trage man auf jeder Flächennormalen PA, PA_1 usw. dasselbe Stück $c = AA' = A_1A_1' =$ usw. nach derselben Seite ab, so geht jeder Kreis der beiden Scharen wieder in einen Kreis über. Denn der Kreis der ersten Schar über AA_1 z. B. wird von P aus durch einen Drehkegel projiziert; verlängert man aber die Mantellinien dieses Kegels alle um dasselbe Stück c, so geht der Kreis in einen neuen Kreis über: in der Fig. 62 in den Kreis über dem Durchmesser $A'A_1'$, so daß seine Ebene senkrecht zur xz-Ebene steht. Die Kegelmantellinien, welche die Flächennormalen der Zyklide längs des Kreises AA_1 waren, stehen auch auf dem neuen Kreis senkrecht. Entsprechendes gilt für jeden Kreis der zweiten Schar. Die Normalen der Zyklide sind also auch die Normalen „der Parallelfläche", welche ebenfalls als Zyklide bezeichnet werden soll. Das oben betrachtete Strahlensystem besitzt also ∞^1 Orthogonalflächen. Die verwandelten Kreise sind für die neue Zyklide ebenfalls Krümmungslinien und schneiden sich überall rechtwinklig. Die Berührungskugeln der Ausgangszyklide gehen in die Berührungskugeln der neuen Zyklide über. Da die Flächennormalen der neuen Zyklide dieselben sind wie die der ursprünglichen, so schneiden dieselben ebenfalls die beiden Fokalkegelschnitte.

Die Punkte A' und A_1' und ihre entsprechenden in der xz-Ebene liegen auf zwei Kreisen um M und M_1 mit den bezüglichen Radien $a - c$ bzw. $a + c$, wenn $a = MK_1 = M_1K_1$ ist. Denn z. B. ist $MA = a$, $AA' = c$, und daher $MA' = a - c$. Die beiden Kreise mit den Radien $a - c$ bzw. $a + c$ sind in Fig. 62 stark ausgezogen. Die Gerade $A'A_1'$, welche ein Durchmesser eines Kreises der ersten Schar für die neue Zyklide ist, schneidet MM_1 in einem Punkt V, der nichts anderes ist als ein ***Ähnlichkeitspunkt der beiden neuen Kreise.*** Denn schneidet $A_1'A'$ den kleinen Kreis um M in C', so ist MC' parallel zu M_1A_1',

da die Dreiecke PAA_1, $PA'A_1'$, $MA'C'$ gleichschenklig sind und dieselben Basiswinkel besitzen.

Man erhält daher folgende sehr anschauliche Erzeugungsweise der neuen Zyklide (Fig. 63): Man ziehe durch den (inneren) Ähnlichkeitspunkt V einen Strahl, welcher die beiden Kreise in zwei Punkten mit nicht parallelen Tangenten A' und A_1' schneiden möge. Über $A'A_1'$ als Durchmesser beschreibe man den Kreis, so daß seine Ebene senkrecht zur Ebene der beiden Kreise steht. Der Ort aller dieser Kreise ist die neue Zyklide. Dies ist die von *Cayley*[1]) und *Catalan* angegebene Erzeugung der *Dupin*schen Zykliden. So haben wir denn durch diese elementargeometrische Studie alle wichtigeren Erzeugungsweisen der Zykliden auf natürliche Weise erhalten.

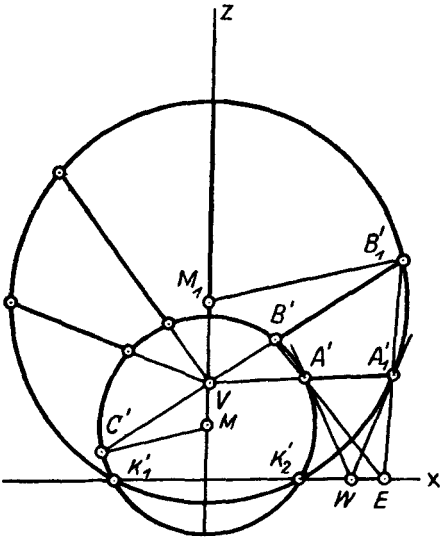

Fig. 63

Man könnte von dieser Definition ausgehend ebenfalls elementar alle Eigenschaften der Zykliden ebenso leicht ableiten. Man müßte dazu den grundlegenden Satz benutzen, daß, wenn $VB'B_1'$ ein zweiter Strahl aus V ist, die vier Punkte $A'A_1'B_1'B'$ auf einem Kreis liegen und $A'B'$ die Gerade $A_1'B_1'$ in einem Punkt E der Potenzlinie der beiden Ausgangskreise trifft. Dann schneiden sich auch die Tangenten in A' und A_1' an die Kreise in einem Punkt W der Potenzlinie, und WA' ist $= WA_1'$. W ist die Spitze des Berührungskegels, der die neue Zyklide längs des Kreises (der ersten Schar) über $A'A_1'$ berührt. Die Mantellinien dieses Kegels sind Tangenten an die zweite Kreisschar der neuen Zyklide. Die zweite Kreisschar wird darum durch Ebenen durch die Potenzlinie aus der Zyklide ausgeschnitten usw. Wir gehen auf die *Cayley*sche Definition nicht weiter ein, da nichts wesentlich[2]) anderes herauskommt als bei der von uns benutzten einfachen *Robert*schen Definition, wenn noch die Parallelflächen hinzugenommen werden. Übrigens ist die *Robert*sche Erzeugungsweise ein spezieller Fall der

[1]) Man vgl. Encykl. d. math. Wiss. Bd. III_3, Heft 2/3, S. 292.

[2]) Man erhält nur die Ringfläche (Wulst) nicht, welche die *Cayley*sche Methode mit umfaßt. Die Kreise in Fig. 63 sind dann als konzentrisch anzunehmen. Die Fokalkegelschnitte sind ausgeartet in einen Kreis (Ort der Mitte von $A'A_1'$) und die Rotationsachse des Ringes. Alle Ringnormalen treffen diese beiden Kurven.

*Cayley*schen, da in Fig. 57, wo die Ausgangskreise gleiche Radien hatten, der Punkt O mit dem inneren Ähnlichkeitspunkt V identisch ist.

Aus der soeben gegebenen Erzeugungsweise der neuen Zyklide gewinnt man ein anschauliches Bild für ihre Gestalt. Die Schnittpunkte der beiden Kreise $K_1'K_2'$ sind wieder zwei Knotenpunkte: nur sind in der neuen „*Hornzyklide*" die beiden „Hörner" nicht mehr kongruent, sondern von verschiedener Größe. Hätte man c oben ein wenig größer genommen, so hätte der Fall eintreten können, daß die beiden stark ausgezogenen Kreise der Fig. 62 sich berührt hätten. Die beiden Knotenpunkte wären dann in einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt der beiden Kreise, zusammengefallen. Dieser Fall bildet den Übergang zu einer neuen Form der Zyklide. Macht man nämlich c noch größer, als es dem Grenzfall entspricht, so liegt der Kreis um M ganz innerhalb des Kreises um M_1, und man erhält dann die sogenannte

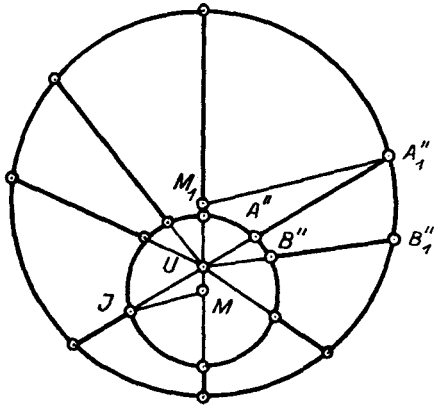

Fig. 64

Ringzyklide.

Auf Grund von Fig. 64 kann man die Ringzyklide so beschreiben. Man ziehe durch die Mittelpunkte M_1M, der beiden Kreise, von denen der eine den andern umschließt, nach entgegengesetzter Richtung die Parallelen MJ und M_1A_1''. Die Linie JA_1'' schneidet aus der Zentralen MM_1 den Ähnlichkeitspunkt U aus; von U aus ziehe man jetzt alle Strahlen und errichte über den Stücken $A''A_1''$, $B''B_1''$ usw. als Durchmesser Kreise, so daß ihre Ebenen senkrecht zur Ebene der beiden Kreise M, M_1 stehen, dann bilden die Gesamtheit aller dieser Kreise die Ringzyklide. Die Ebenen durch die Potenzlinie der beiden Kreise schneiden die andere Kreisschar aus.

Wir setzen nun das Verfahren der Bildung von Parallelflächen fort. In Fig. 65 sind die beiden Kreise der Fig. 64, die zur Ringzyklide geführt haben, und der Ähnlichkeitspunkt U abgebildet. P, der Schnittpunkt von M_1A_1'' und MA'' ist das Zentrum der Kugel, welche die Ringzyklide längs des Kreises $A''A''_1$ berührt. Verlängert man alle Normalen der Ringzyklide, z. B. PA'' und PA_1'', gerade um den Radius des kleinen Kreises, so schrumpft der kleine Kreis in einen Punkt zusammen: Das „Loch" der Ringzyklide ist dann eben verschwunden. Hätte man die Normalen um ein größeres Stück verlängert, so z. B. um den Durchmesser des Kreises um M (s. Fig. 65), so würden jetzt die Kreise der ersten Schar, die sich soeben noch in

M berührt haben, übereinandergreifen: die so erhaltene Zyklide heißt *Spindelzyklide.*

In Fig. 65 ist PA'' verlängert, bis es den kleinen Kreis zum zweiten Male in A''' schneidet, und weiter $A_1''A_1'''$ gleich $A''A'''$ gemacht; außerdem ist um M_1 der Kreis mit Radius M_1A_1''' beschrieben. Dieser Kreis und der kleine Kreis um M sind jetzt die Ausgangskreise für die Spindelzyklide; der Kreis über $A'''A_1'''$ als Durchmesser, wobei die Kreisebene senkrecht zur Zeichenebene steht, ist ein Kreis der ersten Schar der Spindelzyklide. Schneidet $A'''A_1'''$ den Kreis um M zum zweiten Male in K und die Zentrale MM_1 in W, so ist jetzt, da die gleichschenkligen Dreiecke $PA''A_1''$, $PA'''A_1'''$, $MA'''K$ dieselben Basiswinkel besitzen, MK parallel M_1A_1''' aber nunmehr *gleich*gerichtet; W ist also jetzt der andere Ähnlichkeitspunkt der Kreise, auf denen A''' und A_1''' liegen. Fig. 66 gibt einige Durchmesser $A'''A_1'''$, $B'''B_1'''$ usw. der Kreise der ersten Schar der Spindelzyklide wieder. Es ist nun bekanntlich $A'''B'''A_1'''B_1'''$ (s. auch oben) ein Kreisviereck, also

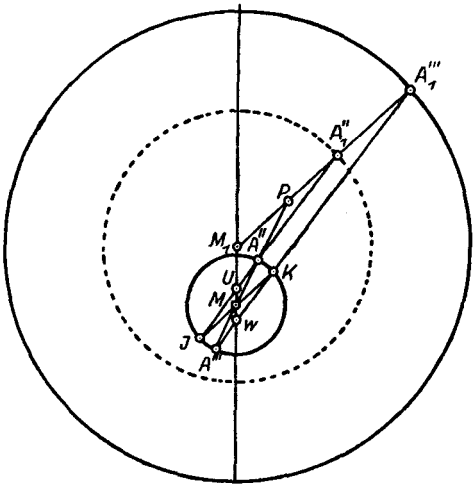

Fig. 65

$$A'''W \cdot WA_1''' = B'''W \cdot WB_1''' = \text{const.} = k^2.$$

Der Punkt W hat also in bezug auf alle Kreise der ersten Schar dieselbe Potenz (absolut genommen) k^2. Errichtet man also in W auf der Ebene der Zeichnung nach beiden Seiten Lote gleich k, so gehen durch die Endpunkte dieser Lote alle Kreise der ersten Schar. Diese Punkte sind Knotenpunkte der Spindelzyklide, und diese besteht aus zwei ineinander geschachtelten Mänteln. Die zweite Kreisschar wird wieder von Ebenen ausgeschnitten, welche durch die Potenzlinie der beiden Kreise um M und M_1 gehen.

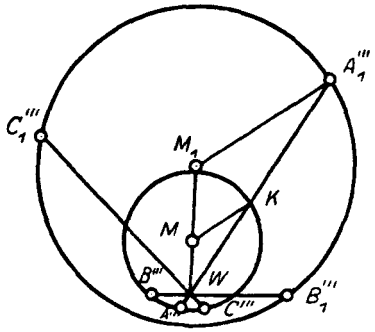

Fig. 66

Die parabolischen Zykliden[1]).

Es möge noch kurz auf die parabolischen Zykliden hingewiesen werden, die sich ebenso behandeln lassen. Die parabolischen Zykliden entstehen, wenn einer der Ausgangskreise durch eine Gerade ersetzt wird. Es sei also (Fig. 67 und 68) der Kreis um M gegeben und die Gerade G, welche den Kreis schneiden, berühren oder nicht schneiden kann. In Fig. 67 ist der erstere, in Fig. 68 der letztere Fall vorausgesetzt. Wird

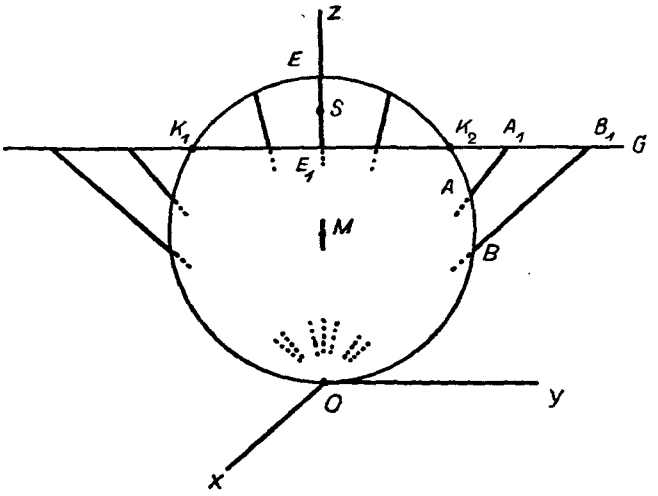

Fig. 67

der zur Geraden G senkrechte Kreisdurchmesser OE als z-Achse, die Tangente in einem seiner Endpunkte O als y-Achse und die Senkrechte in O zur yz-Ebene als x-Achse genommen, so kann die parabolische Zyklide so definiert werden: Man ziehe in der yz-Ebene durch O einen Strahl, der den Kreis zum zweiten Male in A, die Gerade G in A_1 trifft. Man zeichne nun in der Ebene durch AA_1 senkrecht zur yz-Ebene den Kreis über AA_1 als Durchmesser, dann bilden alle derartige Kreise die erste Kreisschar der *parabolischen Zyklide*. Die zweite Kreisschar wird durch die Ebenen, welche durch G gehen, aus der Zyklide ausgeschnitten. Die Gerade G gehört der Fläche an und ebenso die x-Achse, denn man überzeugt sich leicht, daß alle Kreise der zweiten Schar die x-Achse treffen. Schneidet G den Kreis, wie in Fig. 67, in zwei Punkten K_1 und K_2, so sind diese Punkte Knotenpunkte der Fläche, und die Zyklide heißt *parabolische Hornzyklide*; schneidet G den Kreis nicht (Fig. 68), so erhält man die *parabolische Ringzyklide*. Den Übergang zwischen den beiden Typen bildet der Fall, daß G den Kreis berührt.

[1]) Vgl. *V.* und *K. Kommerell*, Analyt. Geometrie, II. Teil, 3. Aufl., 1927, S. 181 ff.

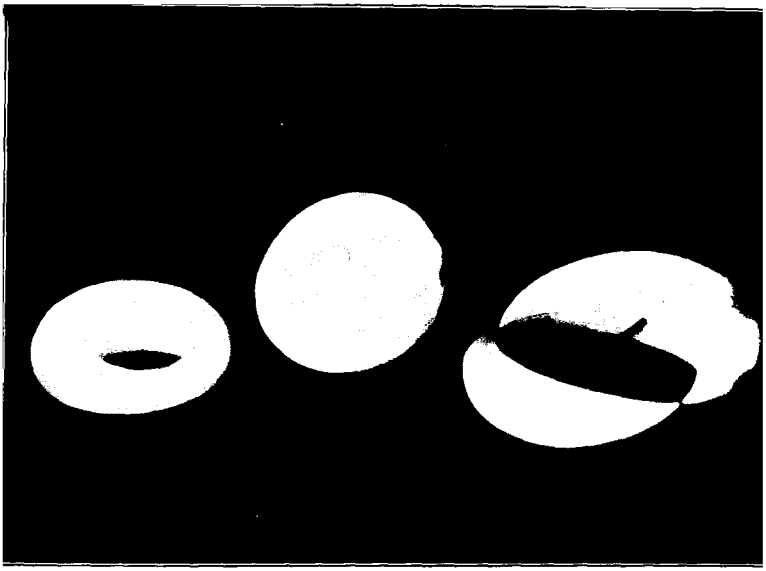

Fig. 69a Fig. 69b Fig. 69c

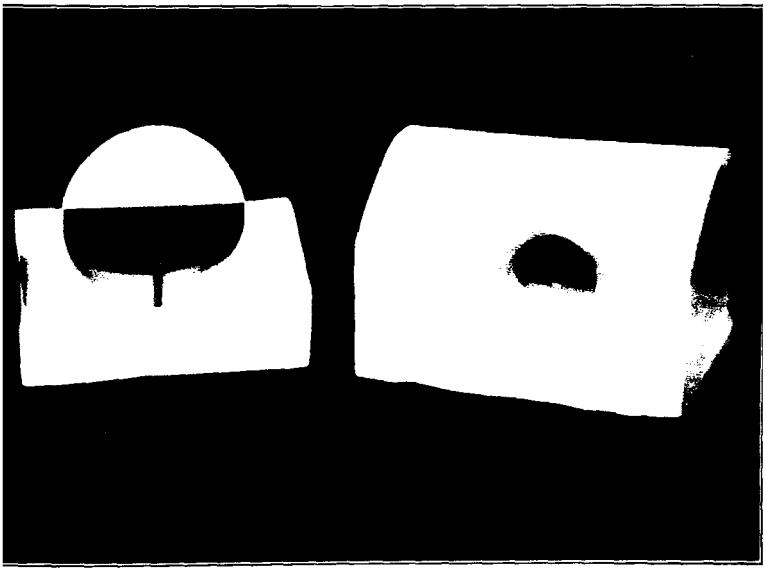

Fig. 69d Fig. 69e

Dupinsche Zykliden

Zu Seite 141

Das Analogon der Spindelzyklide existiert nicht. Diese Zykliden lassen sich genau so behandeln wie die allgemeinen Zykliden. Die Grundlage bildet wieder der Satz, daß AA_1B_1B ein Kreisviereck bildet (s. Satz 2 oben). Da die notwendigen Änderungen im Beweisgang eigentlich auf der Hand liegen, so gehen wir nicht darauf ein. Die Mittelpunkte der Kugeln, welche die Zyklide längs eines Kreises der ersten Schar berühren, liegen auf einer *Parabel* in der yz-Ebene, für welche die z-Achse die Symmetrieachse, die Mitte S von EE_1 der Scheitel und M der Brenn-

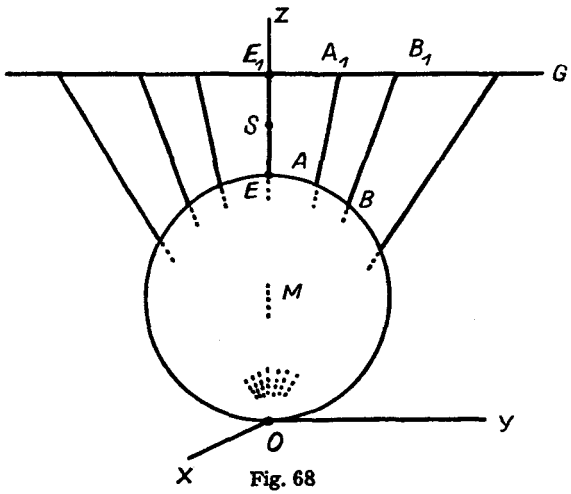

Fig. 68

punkt ist. Die Mittelpunkte der zweiten Schar von Kugeln, welche die Zyklide längs je eines Kreises der zweiten Schar berühren, liegen auf einer Parabel der xz-Ebene, für die M der Scheitel, S der Brennpunkt ist. Die beiden Parabeln heißen die *Fokalparabeln*. Die Zyklidennormalen treffen beide Fokalparabeln. Jede der Parabeln wird von jedem Punkt der andern durch einen Drehkegel projiziert, wobei die Parabeltangente in der Kegelspitze die Drehachse ist. Die beiden Kreissysteme sind die Krümmungslinien der Zyklide. Die Ringzyklide ist eine Parallelfläche der Hornzyklide usw. Die Figuren 69a—69e auf Tafel I sollen die besprochenen Zykliden veranschaulichen.

Die Gleichungen der Zykliden

Die *Dupin*schen Zykliden lassen sich auch sehr leicht analytisch behandeln. Wir geben im folgenden kurz den Gedankengang an, ohne ins einzelne zu gehen. Die Gleichung der Hornzyklide der Fig. 57 kann für das dort zugrunde gelegte Koordinatensystem in einer der beiden folgenden Formen gegeben werden:

$$\frac{(x^2+y^2+z^2-b^2)^2}{4\,b^2\,e^2}=\frac{z^2}{b^2}-\frac{y^2}{e^2}, \tag{1}$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2+b^2)^2}{4\,a^2\,b^2}=\frac{z^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}, \tag{2}$$

welche, wie man leicht nachrechnet, identisch sind. Dabei ist a der Radius der beiden Kreise um M und M_1, $OK_2=b$ und $e=\sqrt{a^2-b^2}$ $=OM_1$. Schneidet man die Fläche mit der Ebene $y=0$, so erhält man leicht die Gleichungen:

$$x^2+(z\pm e)^2=a^2,\ y=0,$$

also in der Tat die beiden Kreise.

Ist u ein Parameter, so kann statt (1) geschrieben werden:

$$u^2\left(\frac{z^2}{b^2}-\frac{y^2}{e^2}\right)=a^2z^2,\quad \frac{u\,(x^2+y^2+z^2-b^2)}{2\,b\,e}=\pm a\,z. \tag{3}$$

Die erste Gleichung stellt bei beliebigem u zwei Ebenen durch die x-Achse, die zweite Gleichung zwei Kugeln dar: dadurch ist also die Existenz der zweiten Kreisschar in Evidenz gesetzt. Alle Kreise dieser Schar gehen durch die Knotenpunkte $y=z=0$, $x=\pm b$.

Statt (2) kann geschrieben werden, wenn v einen Parameter bedeutet:

$$v^2\left(\frac{z^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)=z^2e^2,\quad \frac{v\,(x^2+y^2+z^2+b^2)}{2\,a\,b}=\pm z\,e.$$

Die erste Gleichung stellt zwei Ebenen durch die y-Achse, die zweite Gleichung zwei Kugeln dar. Die beiden Gleichungen lassen also die erste Schar von Kreisen erkennen. Die Gleichungen (1) und (2) kann man auf die verschiedensten Arten finden. Am einfachsten erhält man sie wohl, wenn man die Orthogonalflächen des Systems von Strahlen sucht, die beide Fokalkegelschnitte treffen[1]). Man erhält dann zugleich die Gleichungen der Parallelflächen. Führt man dies aus, so erhält man, wenn u, v, w drei Parameter bedeuten:

$$x=\frac{a\,b\,(u+w)\sqrt{a^2-v^2}}{u\,a^2-v\,e^2},\quad y=\frac{b}{e}\sqrt{u^2-e^2}-\frac{a^2\,b\,(u+w)\sqrt{u^2-e^2}}{e\,(u\,a^2-v\,e^2)}$$

$$z=u-\frac{a^2\,(u+w)\,(u-v)}{u\,a^2-v\,e^2}.$$

Diese Gleichungen stellen ein dreifaches orthogonales Flächensystem dar. Hält man w fest und läßt u, v sich ändern, so durchläuft der Punkt (x, y, z) eine der Parallelflächen zu (1); dabei sind u, v die Parameter der kreisförmigen Krümmungslinien der Zyklide. Setzt man speziell $w=0$ und eliminiert u, v aus (3), so erhält man (1) oder (2). Setzt man $u+w=0$, so erhält man die *Fokalhyperbel*:

[1]) Vgl. z. B. *Liebheit*, „Über die Dupinsche Zyklide", Diss., Halle 1886.

$$\frac{z^2}{e^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x=0.$$

Setzt man andererseits

$$\frac{u+w}{u a^2-v e^2}=\frac{1}{a^2},$$

so erhält man die *Fokalellipse*

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \quad y=0.$$

Endlich geben wir ebenfalls ohne Beweis die Gleichung der parabolischen Zyklide in Fig. 68 an. Setzt man $OE=2r$, $OE_1=2a$, so erhält man als Ort der Kreise AA_1 usw. sehr einfach die Gleichung:

$$(x^2+y^2+z^2-2rz)(z-2a)+2ay^2=0. \tag{4}$$

Je nachdem $a>r$ oder $a<r$ ist, stellt (4) die parabolische Ring- oder Hornzyklide dar. Sind u, v zwei Parameter, so kann man statt (4)

$$z-2a=uy, \quad (x^2+y^2+z^2-2rz)u+2ay=0$$

oder

$$x=vz, \quad x^2+y^2+z^2-2z(r+a)-2axv+4ar=0$$

schreiben und erkennt sofort die beiden Scharen von Kreisen. Den Übergang zwischen den beiden Zykliden vermittelt der Fall $a=r$; setzt man $2a=2r=1$ und verschiebt das Koordinatensystem parallel mit sich, so daß der neue Ursprung in E fällt, so erhält man die sehr einfache Gleichung für diese *spezielle Zyklide*

$$z(x^2+y^2+z^2)+y^2+z^2=0.$$

§ 25. Die Methode der Zentralprojektion[1])

Neben der bisher behandelten Inversion ist eine weitere wichtige Abbildung einer Ebene auf eine andere die Methode der Zentralprojektion. Sie war den Alten wohlbekannt: sie benutzten sie, um Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises auf geometrischem Wege abzuleiten. Für die moderne Geometrie ist die Zentralprojektion ganz besonders wertvoll, beruht doch die projektive Geometrie ihrem Wesen nach auf der Zentralprojektion.

Während wir bei der Darstellung der Inversion und ihrer Anwendungen absichtlich rein geometrisch verfahren sind, so ist es bei der Darstellung der Zentralprojektion reizvoll, sowohl geometrische wie analytische Methoden anzuwenden, da es sich zeigt, daß die beiden Gedankengänge nicht bloß sich ergänzen, sondern gegenseitig befruchten.

[1]) Für das Folgende vgl. man auch: *V.* und *K. Kommerell*, Anal. Geom. II. Tl., 3. Aufl. 1927, S. 16ff.

1. Geometrische Darstellung

Gegeben seien zwei nicht parallele Ebenen E und E' und ein beliebiger Punkt S (Fig. 70). Von S aus sollen die Punkte P, Q usw. der Ebene E nach den Punkten P', Q' usw. der Ebene E' projiziert werden. Diese Abbildung der Ebene E auf die Ebene E', oder umgekehrt, heißt *Zentralprojektion*, S heißt das *Zentrum* und die Schnittgerade a von E und E',

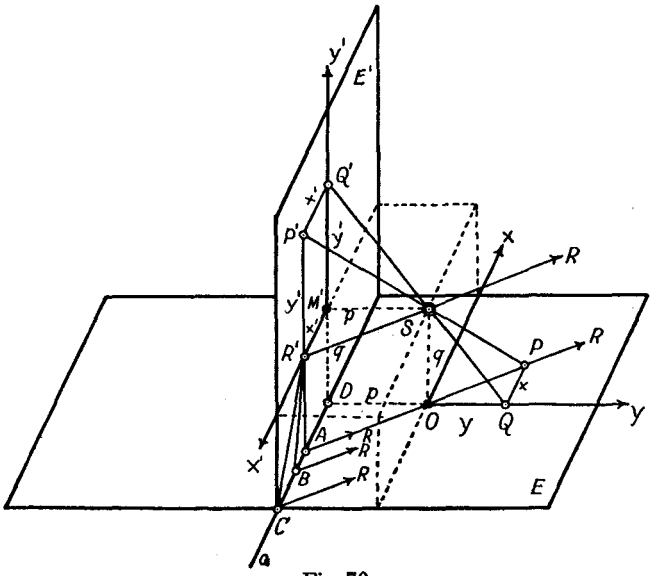

Fig. 70

deren Punkte mit ihren Bildern zusammenfallen, die *Achse*. Man sagt auch, *die Ebenen E und E' seien perspektiv aufeinander bezogen mit S als Zentrum und a als Achse der Perspektivität.* Ist S der Mittelpunkt der Linse einer photographischen Kamera, E' die photographische Platte, so sieht man, daß die Photographie einer ebenen Landschaft E ein perspektivisches Bild von ihr ist. Es handelt sich jetzt darum, die *geometrischen Beziehungen zwischen Original und Bild aufzufinden.*

Zu diesem Zwecke mögen durch S die Ebenen parallel zu E und E' und ebenso die Ebene senkrecht zur Achse a gelegt werden. Diese geben in der Ebene E die Geraden X und Y und in E' die Geraden X', Y'. Die Geraden X, Y seien nun die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems in der Ebene E mit dem Ursprung O, ebenso seien X', Y' die Achsen eines Koordinatensystems in E' mit dem Ursprung M'. Die positiven Richtungen wurden wie in der Figur gewählt, damit ein Punkt P von E mit positiven Koordinaten x, y von S aus in einen Punkt P' von E' mit ebenfalls positiven Koordinaten x', y' projiziert

wird. Der Punkt P' möge nun auf der zur y'-Achse durch P' gezogenen Parallelen $P'R'$ gegen R', der auf der x'-Achse liegen möge, hinrücken. Der Projektionsstrahl $P'SP$ liegt stets, auch wenn P' wandert, in der durch die parallelen Geraden SO und $P'R'$ bestimmten Ebene und trifft daher die Ebene E stets in einem Punkt des Ursprungsstrahls OP. Rückt nun P' immer weiter an R' heran, so rückt P auf OP immer weiter weg von OP. Rückt P' nach R', so schneidet $R'S$ die Ebene E nicht mehr; R' hat also *kein* Bild in der Ebene E. R' und überhaupt jeder Punkt der x'-Achse wäre ein Ausnahmepunkt für die Abbildung, indem diesen Punkten kein Punkt der Ebene E entspricht. Um diese Ausnahme zu beseitigen, ordnet man dem Punkt R' den Punkt R von OP zu, der in der Richtung OP „im Unendlichen" liegt. Dabei soll auch festgesetzt werden, daß der unendlich ferne Punkt in der Richtung OP derselbe sein soll, wie der unendlich ferne Punkt in der Richtung PO. „Einen unendlich fernen Punkt wie R von OP oder PO projizieren" soll dann heißen, daß durch S mit OP oder PO die Parallele zu ziehen und mit E' (in R') zu schneiden ist. Ebenso entspricht natürlich jedem Punkt der x-Achse in E ein unendlich ferner Punkt in E'. Durch diese äußerst zweckmäßige Einführung der sogenannten „uneigentlichen" oder „idealen" Punkte in den beiden Ebenen wird erreicht, daß *ausnahmslos jedem* Punkt der einen Ebene eindeutig ein Punkt der andern Ebene entspricht und umgekehrt. Darum nennt man jetzt die Abbildung eine *eineindeutige.*

Es möge jetzt in der Ebene E' eine Gerade L' (in der Fig. 70 nicht gezeichnet) angenommen werden und diese Punkt für Punkt nach E projiziert werden. Da die Projektionsstrahlen alle in der durch L' und S bestimmten Ebene liegen, so ist die Projektion L von L' auf E der Schnitt jener Ebene mit E, also eine Gerade. *Einer Geraden L' entspricht also eine Gerade L.* Ist dies ausnahmslos der Fall? Nimmt man speziell L' parallel zur x'-Achse, so ist auch L parallel zur x-Achse. Nähert sich L' mehr und mehr der x'-Achse, so verschiebt sich L immer weiter fort von O. Fällt L' mit der x'-Achse zusammen, so hat man kein Bild in der Ebene E, und ebenso hat die x-Achse kein Bild in E'. Um diese Ausnahme wieder zu beseitigen, nimmt man in jeder Ebene E und E' eine unendlich ferne Gerade an und nennt sie die Bilder der x- bzw. x'-Achse. Dadurch wird zugleich in Übereinstimmung mit den obigen Festsetzungen erreicht, daß eine im Endlichen liegende Gerade nur einen unendlich fernen Punkt besitzt: er ist der Schnittpunkt der Geraden mit der unendlich fernen. Da alle unendlich fernen Punkte von E sich in Punkte der x'-Achse abbildeten, so ist die unendlich ferne Gerade von E der Ort der unendlich fernen Punkte von E. Entsprechendes gilt für E'. Jeder Geraden der einen Ebene entspricht jetzt *ausnahmslos* eine Gerade der andern Ebene. Und *jedem* Punkt P auf einer Geraden L von E entspricht ein Punkt P' auf der projizierten Geraden L' in E' ohne Ausnahme. Die Einführung der idealen Elemente

— unendlich ferne Punkte, unendlich ferne Gerade — hat also den Zweck, alle Ausnahmen bei der Abbildung zu beseitigen.

Zieht man durch P' alle Geraden in E', so entsprechen diesen nach der Projektion alle Geraden durch P in E. *Einem Strahlenbüschel entspricht also ein Strahlenbüschel.* Man nehme nun speziell ein Strahlenbüschel in der Ebene E', dessen Spitze R' auf der x'-Achse liegt, also das Büschel $R'A$, $R'B$, $R'C$ usw. Die Projektionen dieser Geraden in E erhält man dadurch, daß die Ebenen $SR'A$, $SR'B$, $SR'C$ usw. mit der Ebene E geschnitten werden. Diese Ebenen bilden aber ein Büschel, dessen Achse SR' parallel zu E liegt. Die Ebene schneidet daher aus dem Ebenenbüschel lauter parallele Gerade aus. Diesen parallelen Geraden ordnet man nun einen und denselben unendlich fernen Punkt R, das Bild von R' zu: die Gerade $R'A$ geht so über in RA, $R'B$ in RB usw. Man sieht auch umgekehrt ein, daß jedem Parallelstrahlenbüschel der Ebene E ein Strahlenbüschel in E' entspricht, dessen Scheitel auf der x'-Achse liegt. Dieser Scheitel heißt der *Fluchtpunkt* und daher die x'-Achse die *Fluchtgerade.* Ebenso entspricht einem Parallelstrahlenbüschel der Ebene E' ein Strahlenbüschel in E mit dem Scheitel auf der x-Achse. Bei der Abbildung von E' auf E ist dann die x-Achse die *Fluchtgerade.* Bei der Photographie oder auf einem Gemälde einer ebenen Landschaft, was nichts anderes ist als eine Zentralprojektion der Landschaft aus dem Auge des Malers auf die Leinwand, sieht man in der Tat, daß parallelen Geraden, etwa parallelen Schienen von Eisenbahngeleisen, Gerade entsprechen, die alle nach einem Punkt, dem *Fluchtpunkt,* konvergieren.

Einer Kurve Γ in E wird nun eine Kurve Γ' in E' entsprechen. Zwei sehr benachbarten Punkten von Γ werden zwei sehr benachbarte Punkte von Γ' entsprechen und daher der Tangente (falls sie existiert) im Punkt P von Γ, die Tangente im entsprechenden Punkt P' von Γ'. Ist Γ eine algebraische Kurve und hat sie die Ordnung n, d. h. wird sie von einer beliebigen Geraden L in n Punkten getroffen, so hat auch Γ' die Ordnung n, da den n-Schnittpunkten von L und Γ ebenfalls n-Schnittpunkte, nämlich die von L' und Γ' entsprechen. Eine Kurve Γ in E wird insbesondere auch die x-Achse in n-Punkten treffen, diesen entsprechen in E' n unendlich ferne Punkte von Γ': die Richtungen nach diesen nennt man die *Asymptotenrichtungen* von Γ'. Zieht man weiter in den n-Schnittpunkten von Γ und der x-Achse die Tangenten an Γ, so hat jede dieser Tangenten mit Γ höchstens $(n-2)$ Punkte gemein. Daraus folgt, daß die nach E' projizierten Tangenten mit Γ' im Endlichen höchstens auch nur $(n-2)$ Punkte gemein haben; man sagt dann, daß diese projizierten Tangenten die Kurve Γ' in unendlich fernen Punkten berühren und nennt sie die *Asymptoten* von Γ'. Dabei haben wir den einfachen Fall vorausgesetzt, daß jene n-Schnittpunkte von Γ mit der x-Achse alle reell sind und getrennt liegen.

Hat Γ die Klasse k, d. h. gehen von einem Punkt P von E k Tangenten an Γ, so hat auch Γ' die Klasse k. Man kann ganz allgemein fragen — und dies ist eine fundamentale Fragestellung —: Welche Eigenschaften der Figuren bleiben bei der Zentralprojektion invariant? So ändert sich z. B. das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden oder von vier Strahlen durch einen Punkt nicht. Vier harmonische Punkte oder Strahlen gehen in ebensolche über. Da die Kegelschnitte Zentralprojektionen eines Kreises sind, so gilt für sie alle die *Polarentheorie*, der *Pascal*sche Satz, der Satz von *Brianchon* usw. Die projektive Geometrie behandelt nun eben diejenigen Eigenschaften der geometrischen Gebilde, die gegenüber einer Zentralprojektion invariant sind; ihr entspricht auf dem algebraischen Gebiet die Invariantentheorie.

2. *Analytische Darstellung*

Hat nun P in E die Koordinaten x, y, sein Bildpunkt P' in E' die Koordinaten x', y', so handelt es sich jetzt darum, x und y als Funktionen von x' und y' oder umgekehrt darzustellen. Dabei sei das Zentrum durch die Strecken $OS = q$, $M'S = p$, die positiv und von Null verschieden sein sollen, festgelegt. Man lege nun durch die Gerade PSP' die Ebene parallel zur Achse a; sie möge die y-Achse in Q, die y'-Achse in Q' schneiden. QSQ' ist jetzt der Schnitt jener Ebene mit der Ebene yy', und darum liegen die Punkte QSQ' in einer Geraden. Da nun die Dreiecke $Q'M'S$ und SOQ ähnlich sind, so folgt

$$OQ:OS = M'S:M'Q',$$

und, da $OQ = y$, $M'Q' = y'$, $OS = q$, $M'S = p$ ist, $yy' = pq$ oder

$$y = \frac{pq}{y'}. \tag{1}$$

Weiter ist $P'Q'$ parallel zu PQ und darum

$$PQ:P'Q' = SQ:SQ' = OQ:M'S.$$

Beachtet man, daß $PQ = x$, $P'Q' = x'$, so folgt

$$x:x' = y:p,$$

oder

$$x = \frac{x'y}{p},$$

oder, wenn aus (1) der Wert von y eingetragen wird,

$$\boxed{x = \frac{qx'}{y'}, \quad y = \frac{pq}{y'},} \tag{I}$$

oder nach x', y' aufgelöst

$$\boxed{x' = \frac{px}{y}, \quad y' = \frac{pq}{y},} \tag{II}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Aus den Formeln folgt, wenn x' ein fester Wert ist, und y' nach Null konvergiert,

$$\lim_{y' \to 0} \frac{x}{y} = \frac{x'}{p}, \quad \lim_{y' \to 0} y = \infty$$

d. h. der Bildpunkt $P(x, y)$ des Punktes $P(x', o)$ ist in ganz bestimmter Richtung ins Unendliche geworfen, in Übereinstimmung mit den geometrischen Betrachtungen. Für viele Zwecke genügt es, dem Zentrum S gegenüber den Ebenen eine spezielle Lage zu geben, etwa $p = q = 1$ zu setzen. Man hat dann

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x'}{y'} & y &= \frac{1}{y'}, \\ x' &= \frac{x}{y}, & y' &= \frac{1}{y}. \end{aligned}} \qquad \text{(III)}$$

Bei der Ableitung der Formeln (I), (II) war es ganz gleichgültig, welchen Winkel die beiden Ebenen E und E' miteinander bildeten. Dreht man also in der Fig. 70 etwa die Ebene E' um a, wobei E fest bleibt, und konstruiert man in der neuen Lage den Punkt S' dadurch, daß man durch M' die Parallele zur y-Achse und durch O die Parallele zur neuen Lage der y'-Achse zieht, so lehren die Formeln, daß der Punkt P' in der neuen Lage mit dem neuen Zentrum S' verbunden eine Gerade gibt, welche die Ebene E in demselben Punkt P durchstoßen muß wie $P'S$. *Zwei Figuren in E und E', die sich also vor der Drehung in perspektivischer Lage in Beziehung auf S befanden, liegen nun auch in der gedrehten Lage perspektivisch in Beziehung auf S'. Das Zentrum beschreibt während der Drehung in der yy'-Ebene einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius q.* Ja es ist sogar leicht zu zeigen, daß auch, wenn E' bis zur Deckung mit E gedreht wird, die perspektivische Lage vorhanden ist in dem Sinne, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt gehen, und daß entsprechende Gerade sich auf a schneiden.

Da es die Anschauung sehr fördert, zu jeder Figur in E' die entsprechende in E genau zu zeichen, so möge angegeben werden, wie zu dem beliebigen Punkt P' der entsprechende P gezeichnet werden kann. P liegt erstens auf $P'S$ und zweitens auf AO, wobei A der Fußpunkt des von P' auf a gefällten Lotes ist. Auch die Punkte Q und Q' hätten benutzt werden können.

3. Einführung homogener Koordinaten

Auch im elementaren Unterricht der analytischen Geometrie ist es nützlich, homogene Koordinaten zu verwenden. Sie können in einer Weise eingeführt werden, daß sie für das Verständnis keine Schwierigkeiten bieten, zumal, wenn gerade die Zentralprojektion mit herangezogen wird. Man gehe von der Aufgabe aus, die Gleichung der Ver-

bindungslinie des Ursprungs O mit einem gegebenen Punkt $P(X, Y)$ aufzustellen; sei $p(x, y)$ ein beliebiger Punkt von OP, so hat man

$$\frac{x}{y} = \frac{X}{Y},$$

oder mit Einführung eines Proportionalitätsfaktors, der jetzt mit $\frac{1}{T}$ bezeichnet werde

$$x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}. \tag{2}$$

Variiert T, so durchläuft $p(x, y)$ die Gerade OP. Da so p durch die *drei* Zahlen X, Y, T bestimmt ist, so nennt man diese ebenfalls Koordinaten von p, und zwar im Unterschied zu den *Cartesischen* (inhomogenen) Koordinaten x, y ***homogene Koordinaten.*** Die Koordinaten ϱX, ϱY, ϱT bestimmen denselben Punkt $p(x, y)$. Es kommt also bei den homogenen Koordinaten X, Y, T nur auf ihre Verhältnisse an. Der Punkt mit den homogenen Koordinaten 3, 4, 5 hat die *Cartesischen* $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, der mit den homogenen Koordinaten 6, 8, 10 hat die *Cartesischen* $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$ oder wieder $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

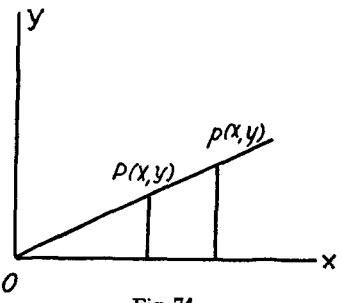

Fig. 71

Setzt man in (2) $T = 1$, so folgt $x = X$, $y = Y$, d. h. X, Y bedeuten dann einfach die *Cartesischen* Koordinaten.

Nun lasse man T in (2) unter Festhaltung von X, Y absolut genommen immer kleiner werden, dann rückt p auf OP immer weiter weg von O. Wird $T = 0$, so verlieren (2) ihren Sinn. Man kann aber dem Wert $T = 0$ den unendlich fernen Punkt von OP zuordnen, wie es der Grenzübergang nahelegt. Der Punkt mit den homogenen Koordinaten X, Y, 0 ist also ein unendlich ferner Punkt; er wird konstruiert dadurch, daß man den Punkt P mit den *Cartesischen* Koordinaten X, Y konstruiert: der unendlich ferne Punkt von OP ist der Punkt mit den homogenen Koordinaten X, Y, 0.

Die Punkte $X = 0$, $T \neq 0$ liegen nach (2) auf der y-Achse, $X = 0$ ist also die Gleichung der y-Achse, der Punkt $X = 0$, $T = 0$, $Y \neq 0$ ihr unendlich ferner Punkt; ebenso bedeutet $Y = 0$ die Gleichung der x-Achse, $Y = 0$, $T = 0$, $X \neq 0$ ihren unendlich fernen Punkt. Durch $T = 0$ waren alle unendlich fernen Punkte definiert: diese wurden aber als auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden, liegend angenommen: ***darum sagen wir*** $T = 0$ ***ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden.*** Die x- und y-Achse zusammen mit der unendlich fernen Geraden definieren ein System spezieller Dreieckskoordinaten, nämlich eben der homogenen Koordinaten X, Y, T. Setzt man eine Variable

allein Null, so erhält man die Seiten, setzt man zwei (aber nur zwei) Variable Null, so erhält man die Ecken des „Koordinatendreiecks". *Dagegen verbieten wir,* daß gleichzeitig $X = 0$, $Y = 0$, $T=0$ sind, weil dem Tripel (0, 0, 0) kein Punkt der Ebene zugeordnet werden kann.

Durch diese Festsetzungen ist erreicht:

1. *Jedem zulässigen Wertetripel X, Y, T ist* (unter Hinzunahme der unendlich fernen Punkte) *ein einziger Punkt der Ebene zugeordnet.*

2. *Jedem endlichen oder unendlich fernen Punkt ist abgesehen von einem Faktor ein einziges Zahlentripel X, Y, T zugeordnet.*

Der Wert der homogenen Koordinaten beruht nun vornehmlich darauf, daß man mit ihrer Hilfe auch die unendlich fernen Elemente analytisch erfassen kann, und dann, daß, falls es sich um algebraische Verhältnisse handelt, die Gleichungen homogen werden, wodurch Symmetrie in die Formeln hereinkommt. Als Beispiel diene die allgemeine Kurve zweiter Ordnung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,.$$

Nach (2) erhält die Gleichung die homogene Form

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XT + 2a_{23}YT + a_{33}T^2 = 0\,, \qquad (3)$$

wo nun jedes Glied in bezug auf die laufenden Koordinaten X, Y, T vom zweiten Grad geworden ist. Sucht man die unendlich fernen Punkte, so hat man $T = 0$ zu setzen, man erhält also

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0\,, \qquad T = 0\,. \qquad (4)$$

Hieraus erhält man für $\frac{Y}{X}$ zwei Werte, welche zusammen mit $T = 0$ die Koordinaten der unendlich fernen Punkte bestimmen: Diese sind reell verschieden, zusammenfallend, komplex, je nachdem $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,\ = 0,\ < 0$ ist. Ist die Kurve nicht in ein Linienpaar entartet, so hat man entsprechend eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse.

Ein zweites Beispiel:

$$f(x, y, t) = 0 \qquad (5)$$

möge die Gleichung einer algebraischen Kurve in laufenden homogenen Koordinaten x, y, t sein. Die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt (x, y, t) lautet dann, wie wir hier nicht beweisen wollen,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + T\frac{\partial f}{\partial t} = 0\,, \qquad (6)$$

wo X, Y, T laufende Koordinaten der Tangente und x, y, t die festen Koordinaten des Berührungspunktes sind, und wo vorausgesetzt ist, daß $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial t}$ nicht alle Null sind, weil sonst der Punkt (x, y, t) singulär wäre. Die Gleichung (6) gilt nun aber auch für unendlich ferne Berührungspunkte, sie liefert also die zugehörige Asymptote. Die Parabelgleichung heißt z. B. $y^2 - 2pxt = 0$: Wir suchen die Tangente

in dem Punkt $(x, 0, 0)$, $x \neq 0$, d. h. dem unendlich fernen Punkt der x-Achse. Es ist nun $\frac{\partial f}{\partial x} = -2pt$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial t} = -2px$. Für die Werte $(x, 0, 0)$ nehmen diese Differentialquotienten der Reihe nach die Werte $0, 0, -2px$ an. Nach (6) hat man also

$$X \cdot 0 + Y \cdot 0 + T(-2px) = 0 \text{ und, da } x \neq 0 \text{ ist, } T = 0,$$

d. h. die Parabel berührt die unendlich ferne Gerade $T = 0$, wie dies ja aus andern Gedankengängen her bekannt ist.

Noch weitere Beispiele werden sich unten ergeben.

Wir kehren nun zu den Formeln (I) der Zentralprojektion zurück und führen durch die Gleichungen

$$x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}, \quad x' = \frac{X'}{T'}, \quad y' = \frac{Y'}{T'}, \tag{7}$$

in den Ebenen E und E' *homogene* Koordinaten ein. Man erhält sonach

$$\frac{X}{T} = \frac{qX'}{Y'}, \quad \frac{Y}{T} = \frac{pqT'}{Y'}$$

oder da es bei den homogenen Koordinaten nur auf das Verhältnis ankommt:

$$\boxed{X = qX', \quad Y = pqT', \quad T = Y'.} \tag{IV}$$

Während nun die Formeln (I) für $y' = 0$ versagen, so ordnen die Formeln (IV) *jedem* Punkt (X', Y', T') der Ebene E' ***eindeutig und ohne Ausnahme*** einen Punkt (X, Y, T) der Ebene zu und umgekehrt. Der Fluchtgeraden $Y' = 0$ von E' ist nach (IV), die Gerade $T = 0$ der Ebene E d. h. die unendlich ferne Gerade ***analytisch*** zugeordnet, wie wir dies in der *geometrischen* Darstellung erkannt haben. Ebenso entspricht der Fluchtgeraden $Y = 0$ der Ebene E nach (IV) die unendlich ferne Gerade $T' = 0$ von E'. Damit erst erscheint die Einführung homogener Koordinaten in ihrer vollen Bedeutung.

Im folgenden werden wir uns ausschließlich der speziellen Zentralprojektion bedienen, für die $p = q = 1$ ist. Man hat dann:

$$\boxed{X = X', \quad Y = T', \quad T = Y'.} \tag{V}$$

Man hat so den

Satz. Sind a, b, c die homogenen Koordinaten eines Punktes der Ebene E', so sind a, c, b die homogenen Koordinaten des in die Ebene E projizierten Punktes.

Ist nun in einer der Ebenen, z. B. in der Ebene E, eine beliebige Kurve gegeben, deren Gleichung in homogenen Koordinaten

$$f(X, Y, T) = 0 \tag{8}$$

sein möge, so hat die in die Ebene E' projizierte Kurve die Gleichung

$$f(X', T', Y') = 0, \tag{9}$$

wobei die Striche ebensogut auch weggelassen werden könnten, da es ja gleichgültig ist, wie die laufenden Koordinaten bezeichnet werden. Man hat daher den

Satz. Um durch Zentralprojektion den unendlich fernen Punkt der y-Achse in den Ursprung zu projizieren, vertauscht man in der homogenen Gleichung $f(X, Y, T) = 0$ *der zu projizierenden Kurve* Y *und* T; *dabei geht die unendlich ferne Gerade in die x-Achse und die x-Achse in die unendlich ferne Gerade über. Entsprechendes gilt, wenn* X *und* T *vertauscht werden.*

Vom projektiven Standpunkt aus sind also die drei Variabeln X, Y, T durchaus gleichberechtigt.

Dieser Satz ist für die Theorie der algebraischen Kurven deshalb von Wichtigkeit, weil dadurch die Aufgabe, eine Kurve im Unendlichen zu untersuchen, zurückgeführt wird auf die Aufgabe, die projizierte Kurve in Beziehung auf die X-Achse zu untersuchen. Da weiter durch Vertauschen zweier Variabeln der Grad der Gleichung nicht geändert wird, so sieht man auch hier bestätigt, was sich schon oben ergeben hat, daß eine algebraische Kurve n-ter Ordnung wieder in eine solche der n-ten Ordnung durch Zentralprojektion übergeführt wird.

Beispiel. In der Ebene E' sei die *Neil*sche Parabel

$$Y'^2 T' = X'^3 \tag{10}$$

gegeben; sie geht durch Zentralprojektion (Fig. 72) über in die Kurve

$$T^2 Y = X^3, \tag{11}$$

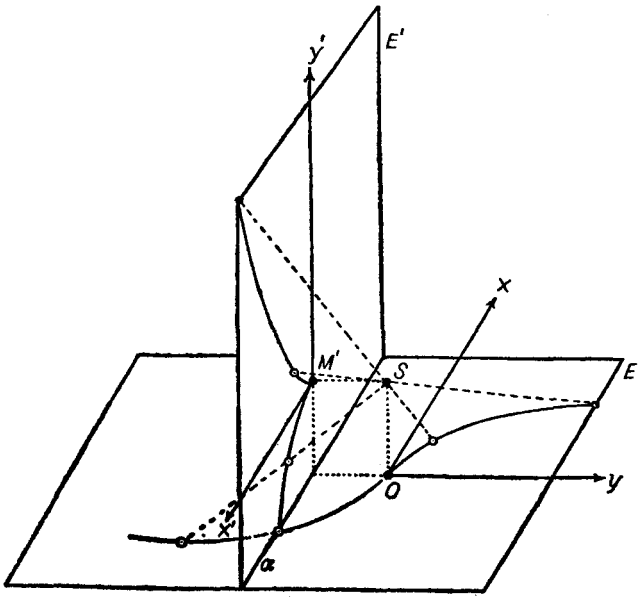

Fig. 72

welche eine kubische Parabel ist. Weil nun die Spitze der *Neil*schen Parabel und die Tangente in ihr ins Unendliche projiziert werden, so sagt man, daß die kubische Parabel im unendlich fernen Punkt der y-Achse eine Spitze besitzt, wobei die unendlich ferne Gerade Tangente in ihr ist. In der Tat hat die Kurve $f(X, Y, T) = X^3 - YT^2 = 0$ im Punkt $X = 0$, $T = 0$ einen singulären Punkt; denn $\frac{\partial f}{\partial X} = 3X^2$, $\frac{\partial f}{\partial Y} = -T^2$, $\frac{\partial f}{\partial T} = -2YT$ verschwinden alle für $X = 0$, $T = 0$.

Der Wendepunkt der kubischen Parabel mitsamt seiner Tangente wird bei der Projektion ebenfalls ins Unendliche geworfen; deshalb erklärt man, daß die *Neil*sche Parabel in unendlich fernen Punkt der y'-Achse einen Wendepunkt besitzt, wobei seine Tangente die unendlich ferne Gerade ist. In der Tat zeigt man leicht, daß die *Hesse*sche Kurve von (10) durch den Punkt $X' = 0$, $T' = 0$ hindurchgeht, der kein singulärer ist.

§ 26. Beispiele zur Zentralprojektion. Photogrammetrie

1. Die Gleichung

$$AX + BY + \lambda T = 0 \tag{1}$$

stellt entsprechend den verschiedenen Werten des „Parameters" λ ein System paralleler Geraden vor, da alle Geraden denselben unendlich fernen Punkt $AX + BY = 0$, $T = 0$ besitzen. Schreibt man die Gleichung inhomogen

$$Ax + By + \lambda = 0,$$

so sieht man sofort bestätigt, daß ein Parallelstrahlenbüschel vorliegt. Nach den Formeln (V) des § 25, nämlich

$$X = X', \qquad Y = T', \qquad T = Y', \tag{2}$$

geht dieses Parallelstrahlenbüschel nach der Projektion über in

$$AX' + BT' + \lambda Y' = 0, \tag{3}$$

welche Gleichung lauter Strahlen darstellt, die durch den Punkt (Fluchtpunkt)

$$AX' + BT' = 0, \qquad Y' = 0$$

der Fluchtgeraden in der Ebene E' gehen, in Übereinstimmung mit den geometrischen Betrachtungen in § 25.

2. *In der Ebene E' liege ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf der y'-Achse, welches ist seine Zentralprojektion nach E?*

Die Gleichung des Kreises lautet in homogenen Koordinaten

$$X'^2 + (Y' - aT')^2 = r^2 T'^2$$

und die Gleichung des nach E projizierten Kreises daher nach (2)

$$X^2 + (T - aY)^2 = r^2 Y^2,$$

oder in nicht homogenen (*Cartesi*schen) Koordinaten ($T = 1$)

$$X^2 + (1 - aY)^2 = r^2 Y^2$$
$$X^2 + Y^2(a^2 - r^2) - 2aY = -1 . \tag{4}$$

Ist zunächst a^2 von r^2 verschieden, so erhält man der Reihe nach

$$\frac{X^2}{a^2 - r^2} + Y^2 - \frac{2aY}{a^2 - r^2} = -\frac{1}{a^2 - r^2}$$
$$\frac{X^2}{a^2 - r^2} + \left(Y - \frac{a}{a^2 - r^2}\right)^2 = \frac{a^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{1}{a^2 - r^2} = \frac{r^2}{(a^2 - r^2)^2}$$
$$\frac{X^2}{\frac{r^2}{a^2 - r^2}} + \frac{\left(Y - \frac{a}{a^2 - r^2}\right)^2}{\left(\frac{r}{a^2 - r^2}\right)^2} = 1 . \tag{5}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle

I. $a > r$. Der Kreis in E' (vgl. Fig. 73) schneidet die Fluchtlinie d. h. die x'-Achse *nicht*, die projizierte Kurve 2. Ordnung hat dann keine reellen unendlich fernen Punkte und muß daher eine Ellipse sein, was analytisch auch unmittelbar aus (5) folgt. Für $a^2 = r^2 + 1$ insbesondere ist nach (4) die projizierte Ellipse ebenfalls ein Kreis. Es fragt sich nun, wo die Scheitel und der Mittelpunkt der Ellipse in E liegen. Zunächst ergibt sich, daß die y-Achse eine Symmetrieachse der Ellipse sein muß; der oberste und unterste Punkt A' und B' des Kreises in E' geben daher die Scheitel A und B auf der y-Achse. Sei nun U' der Pol der x'-Achse in Beziehung auf den Kreis, so liegen die vierten harmonischen Punkte aller Kreissekanten durch U' auf der x'-Achse und werden daher nach der Projektion ins Unendliche geworfen. Das Bild U von U' ist also der Pol der unendlich fernen Geraden von E in Beziehung auf die Ellipse und darum der Mittelpunkt. Die Polare von M' geht durch U', ist parallel zur x'-Achse und schneidet aus dem Kreis die Punkte C', D' aus. Ihre Bilder sind die beiden andern Scheitel der Ellipse. K' sei ein beliebiger Punkt der x'-Achse, seine Polare $U'L'$ muß durch U' gehen.

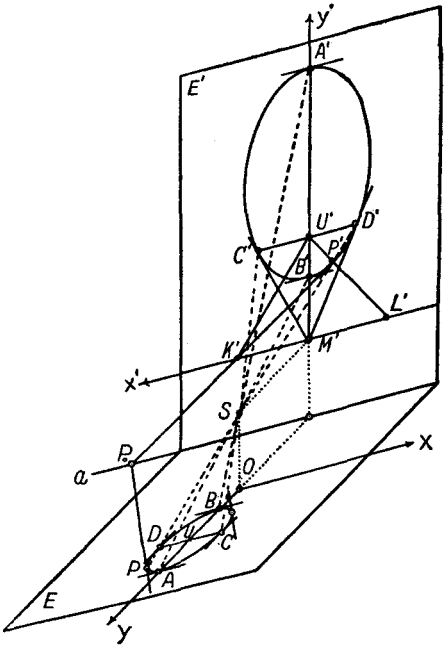

Fig. 73

Die Sekanten aus K' haben ihre vierten harmonischen Punkte auf $U'L'$. In der Projektion ergibt sich, daß die Parallelstrahlen aus dem unendlich fernen Punkt K ihre Sehnenmitten auf dem Durchmesser UL haben; entsprechend folgt, daß die Parallelstrahlen aus L ihre Sehnenmitten auf dem Durchmesser UK haben. Mit andern Worten $U'K'$ und $U'L'$ geben in der Projektion konjugierte Durchmesser. Das Dreieck $U'K'L'$ ist ein Polardreieck, in dem jede Ecke die Gegenseite zur Polaren hat; ihm entspricht in E das Polardreieck UKL, für das zwei Ecken K und L im Unendlichen liegen. Die Theorie der konjugierten Durchmesser erscheint so als ein besonderer Fall der Beziehungen, die zwischen Pol und Polare stattfinden. In der Figur ist noch ein Punkt P' und die Kreistangente $P'P_0$ gezeichnet; sie hat als Bild die Ellipsentangente P_0P, und die Ebene $P'P_0P$ ist Tangentialebene des Kegels aus S längs der Mantellinie PP'.

II. $a = r$ (Fig. 74). Der Kreis in der Ebene E' berührt in diesem Falle die x'-Achse (Fluchtgerade). Die projizierte Kurve berührt also

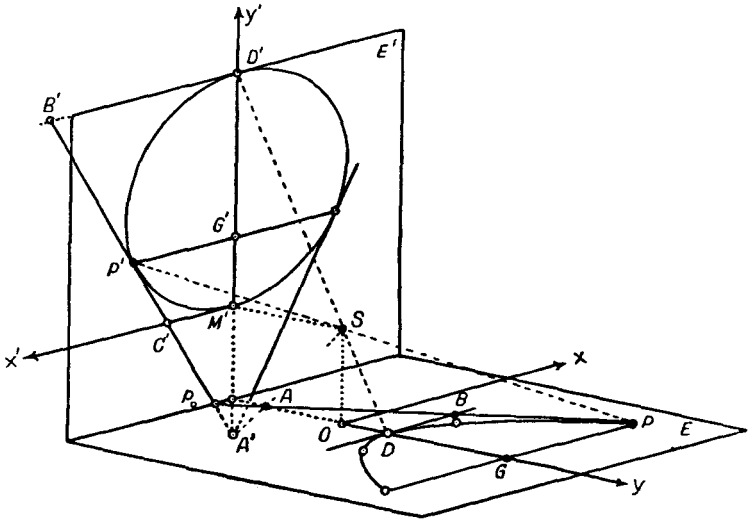

Fig. 74

die unendlich ferne Gerade im unendlich fernen Punkt M der y-Achse, und ist eine *Parabel*. In der Tat folgt aus (4) mit $a = r$

$$X^2 - 2aY + 1 = 0$$

eine Gleichung, welche eine Parabel darstellt, deren Achse die y-Achse ist; das Bild D des obersten Kreispunktes D' ist ihr Scheitel, und die Kreistangente in D' projiziert sich als Scheiteltangente. Ebenso ist das Bild der Kreistangente $P'P_0$ in P' die Parabeltangente P_0P in P.

Schneidet P_0P' die x'- und y'-Achse in C' und A' und die oberste Kreistangente in B', so sind $A'P'B'C'$ vier harmonische Punkte. Zum Beweis bedenke man, daß die Kreispolare von A' durch P' und parallel zur x'-Achse geht; sie möge die y'-Achse in G' schneiden. Jetzt sind $A'G'D'M'$ vier harmonische Punkte, welche durch Strahlen parallel zur x'-Achse in die Punkte $A'P'B'C'$ projiziert werden, darum liegen auch diese harmonisch. Im Bilde sind also auch die Punkte $APBC$ vier harmonische, und, weil C ein unendlich ferner Punkt ist, so ist $AB = BP$. Zieht man noch PG senkrecht zur y-Achse, so ist $AD = DG$. Man hat so den bekannten

Satz. Die Subtangente AG eines beliebigen Parabelpunktes P wird durch den Scheitel D der Parabel halbiert.

Aus diesem Satz zusammen mit der bekannten Erzeugungsweise mit Hilfe von Brennpunkt und Leitlinie lassen sich ja die wichtigsten Parabeleigenschaften leicht geometrisch gewinnen.

III. $a < r$ (s. Fig. 75a). Der Kreis schneidet in diesem Falle ($a \geqq 0$) die Fluchtlinie, d. h. die x'-Achse in zwei verschiedenen Punkten. Die

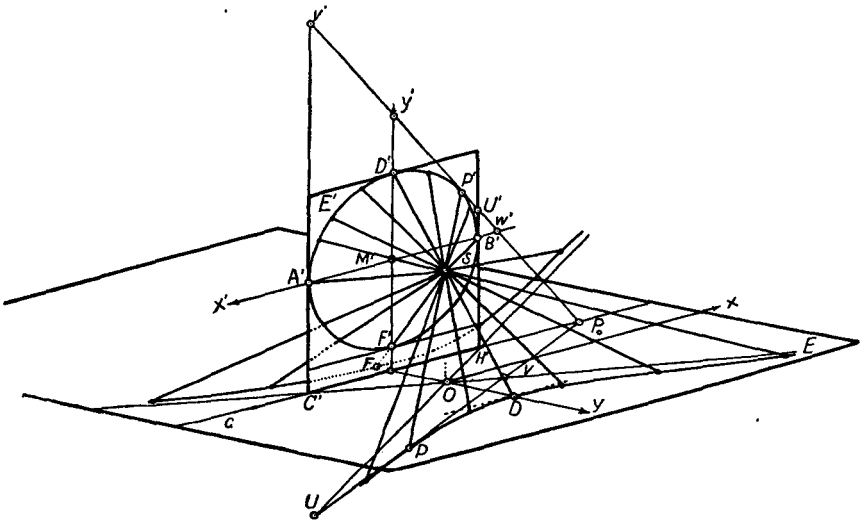

Fig. 75a

projizierte Kurve besitzt daher zwei unendlich ferne Punkte und ist demnach eine Hyperbel, wie auch aus (5) hervorgeht. Die y-Achse ist ihre reelle Hauptachse. Wir behandeln den speziellen Fall $a = 0$, in welchem der Kreis der Ebene E' in M' seinen Mittelpunkt hat. Aus (4) ergibt sich als Gleichung der Hyperbel

$$r^2 Y^2 - X^2 = 1\,, \tag{6}$$

O ist ihr Mittelpunkt, und die Gleichungen ihrer Asymptoten lauten

$$rY - X = 0\,, \qquad rY + X = 0\,, \tag{7}$$

und zurückprojiziert in die Ebene E' nach (2)

$$rT' - X' = 0\,, \qquad rT' + X' = 0\,,$$

oder inhomogen

$$x' = r\,, \qquad x' = -r\,;$$

dies sind aber die Kreistangenten in den Kreispunkten A' und B', die in der Ebene E in die unendlich fernen Punkte der Hyperbel übergehen. Damit hat sich an dem Beispiel das bestätigt, was oben geometrisch allgemein über die Asymptoten einer Kurve gesagt worden ist. Der Halbkreis über der Fluchtgeraden in der Ebene E' gibt nun den einen Hyperbelast, der andere Halbkreis den andern Hyperbelast: man wird zu der Anschauung gedrängt, daß die Hyperbel wie der Kreis in einem Zuge durchlaufen werden kann. Der oberste und unterste Punkt D', F' des Kreises haben als Bilder die Hyperbelscheitel. Die Kreistangente P_0P' in P' geht in die Hyperbeltangente P_0P in P über. Schneidet die Kreistangente die beiden Kreistangenten, die parallel zur y'-Achse gehen, und die x'-Achse der Reihe nach in U', V', W', so folgt ähnlich wie in II, daß $U'V'W'P'$ vier harmonische Punkte sind und darum auch ihre Projektionen $UVWP$. Da aber W im Unendlichen liegt, so folgt

$$UP = PV$$

und damit der bekannte Satz, daß das Stück jeder Hyperbeltangente zwischen den Asymptoten vom Berührungspunkt halbiert wird.

Es sei nun allgemeiner (Fig. 75b) $R'T'$ eine beliebige Kreissekante, welche den Kreis in P', Q', die Tangenten der Punkte A' und B' in

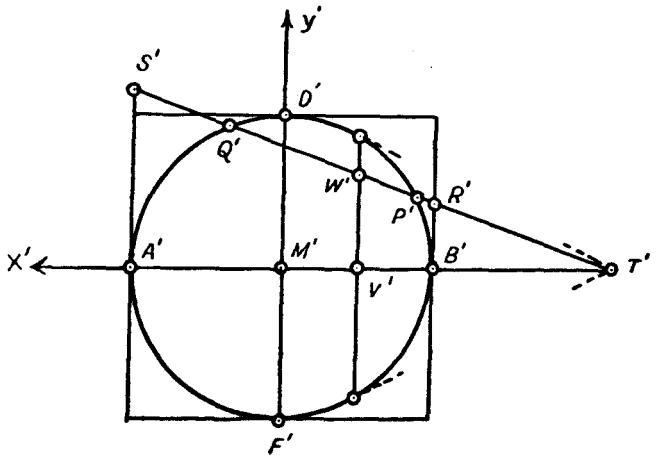

Fig. 75 b

S', R' und die Fluchtlinie in T' schneide. Die Polare von T' sei $V'W'$, sie ist parallel zur y'-Achse. Dann sind $T'W'P'Q'$ und $T'V'A'B'$ je vier harmonische Punkte. Die letzteren werden durch die Parallelen zur y'-Achse in die vier harmonischen Punkte $T'W'S'R'$ übergeführt. In der Projektion in die Ebene E sind dann auch $TWPQ$ und $TWSR$ harmonische Punktgruppen; da aber T ins Unendliche fällt, so ist W die Mitte von PQ und von RS, d. h. $RP = QS$. Nun liegt R auf der einen Asymptote (Projektion von $B'R'$), S auf der andern. Man hat also den bekannten

Satz. Die Stücke einer Sekante der Hyperbel zwischen der Hyperbel und den Asymptoten sind gleich groß, und speziell den obigen Satz: das Stück einer Hyperbeltangente zwischen den Asymptoten wird vom Berührungspunkt halbiert.

3. *Ein allgemeines ebenes Viereck soll durch Zentralprojektion in ein Quadrat übergeführt werden.*

Das Viereck $A'B'C'D'$ (Fig. 76) der Ebene E' soll also in ein Quadrat $ABCD$ der Ebene abgebildet werden. Da AB parallel CD und

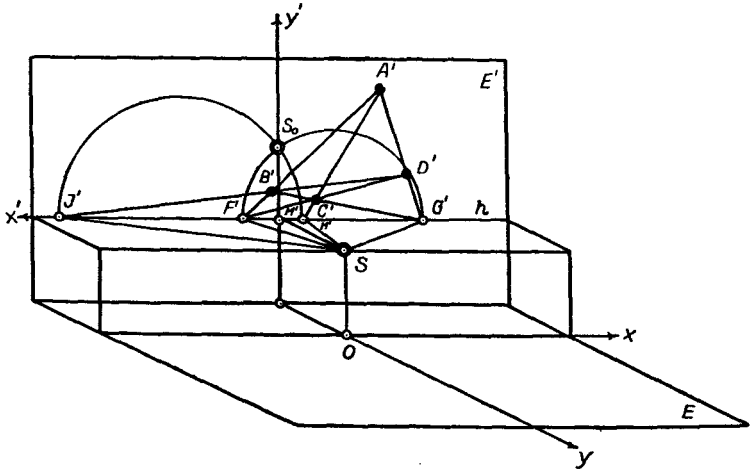

Fig. 76

BC parallel AD werden soll, so muß das Viereck $A'B'C'D'$ so in der Ebene E' verschoben werden, daß der Schnittpunkt F' von $A'B'$ und $C'D'$ und ebenso der Schnittpunkt G' von $A'D'$ und $B'C'$ auf der Fluchtlinie liegt. Das Viereck wird jetzt jedenfalls in ein Parallelogramm übergeführt, das Zentrum S mag liegen, wie es will. Nun gibt $F'S$ die Richtung im Raum an, mit der AB parallel geht, und ebenso gibt $G'S$ die Richtung von AD an, da ja in diese Richtungen F' bzw. G' nach E projiziert werden. AB soll aber auf AD senkrecht

stehen, also muß der Winkel $F'SG'$ ein Rechter sein: S muß also auf dem Kreis liegen, der über dem Durchmesser $F'G'$ beschrieben ist in einer Ebene, die durch die Fluchtlinie h geht und parallel zu E ist. Wird S auf diesem Kreis gewählt, so wird sicher $A'B'C'D'$ in ein Rechteck abgebildet. Nun gibt ebenso der Winkel $H'SJ'$ den Winkel an, den AC und BD bilden: dieser soll aber ein Rechter sein. Darum muß S auch auf dem Kreis über $H'J'$ als Durchmesser in jener Ebene liegen. Damit ist S als einer der beiden Schnittpunkte der beiden Kreise bestimmt[1]). Das Viereck $A'B'C'D'$ wird jetzt in ein Rechteck mit aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen projiziert, d. h. in ein Quadrat. Vom projektiven Standpunkt aus ist also ein Quadrat mit einem allgemeinen Viereck gleichwertig. Der bekannte Satz vom vollständigen Viereck ist nun für ein Quadrat ohne weiteres richtig, darum gilt er auch für das allgemeine Viereck.

4. Projiziert man die Fig. 32 des (speziellen) *Desarguesschen Satzes* zentral, so liegen die drei Schnittpunkte der Paare AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$, die jetzt auf der unendlich fernen Geraden liegen, nachher ebenfalls auf einer Geraden, nämlich der Fluchtlinie. Man erhält so den *allgemeinen Desarguesschen Satz über perspektive Dreiecke.*

5. Projiziert man entsprechend die Fig. 34 des (speziellen) *Pascalschen Satzes* zentral, so liegen die drei Schnittpunkte der Paare AF, CD; BF, CE; AE, BD, die jetzt auf der unendlich fernen Geraden liegen, nachher ebenfalls auf einer Geraden, nämlich der Fluchtlinie. Man erhält so den *allgemeinen Pascalschen Satz für ein Geradenpaar.*

Photogrammetrie

In engstem Zusammenhange mit der Theorie der Zentralprojektion steht die Methode der *Photogrammetrie*, d. h. des Verfahrens, das aus einer oder mehreren Photographien eines Geländeabschnitts oder eines Gebäudes auf seine Abmessungen zu schließen lehrt. Wir kehren zur Fig. 70 zurück, die wir, soweit wir sie brauchen, in Fig. 77a wiedergeben. Ebene E sei eine ebene Landschaft, S der Mittelpunkt des Objektivs eines Photographenapparates, die Ebene E' ($\perp$ zur Ebene E) die photographische Platte, dann ist P' das Bild von P auf der Platte. S heißt hier der *Augpunkt*, SM' ist die Achse der Kamera; die Strecke $SM' = p$, d. h. der Abstand von Augpunkt und von photographischer Platte heißt die *Bildweite*. M' heißt der *Hauptpunkt*, die x'-Achse die *Bildhorizontale* und die y'-Achse die *Hauptvertikale*. $SO = q$ ist die Höhe des Objektivmittelpunktes über der Ebene E. Die Größen p und q sind experimentell leicht zu ermitteln und daher als bekannt anzusehen.

Aus den Koordinaten x', y', die man aus der Photographie für P' entnimmt, berechnet man nach den Formeln (I) des § 25 die zugehörigen

[1]) Die in der Fig. 76 gezeichneten Kreise sind um die Fluchtlinie um 90° nach vorne heruntergeklappt zu denken: Ihr Schnittpunkt S_0 gelangt dann nach S.

Koordinaten x, y des Originals P: man hat also

$$x = \frac{q x'}{y'}, \qquad y = \frac{p q}{y'}. \tag{8}$$

Wichtig sind besonders der „Horizontalwinkel" α, d. h. der Winkel, den OP mit der y-Achse bildet, und der „Vertikalwinkel" β, d. h. der Winkel SPO. Man hat

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{x'}{p}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{y'}{+\sqrt{x'^2 + p^2}}, \tag{9}$$

das Letztere, weil aus dem Dreieck $P'SR'$, in dem $\sphericalangle P'SR' = \beta$ ist, folgt $\operatorname{tg}\beta = P'R' : R'S$; $P'R'$ ist aber $= y'$ und $R'S = \sqrt{M'R'^2 + M'S^2} = \sqrt{x'^2 + p^2}$.

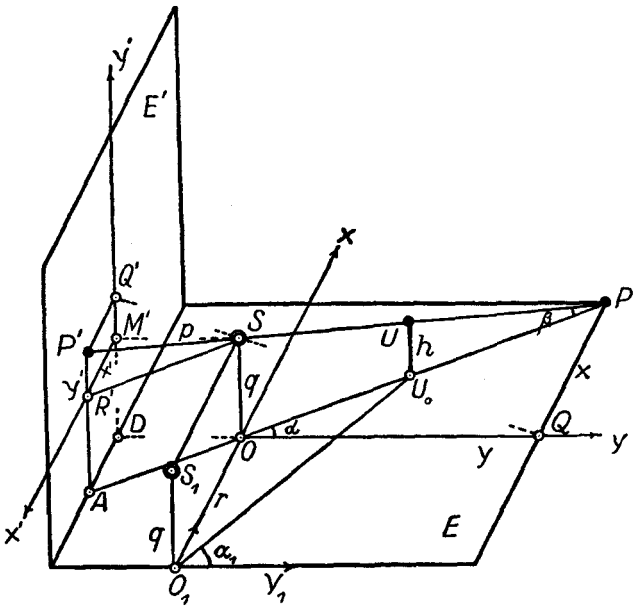

Fig. 77a

Wir haben bisher angenommen, daß eine *ebene* Landschaft, etwa das Ufer eines Sees, aufgenommen werde. Wie ist es nun aber, wenn eine räumliche Figur (etwa ein Gebirge) photographiert wird? Sei U ein solcher Raumpunkt, so ist es notwendig, die Horizontalprojektion U_0 und die Höhe $U_0U = h$ zu kennen. Es zeigt sich nun, daß man dann aus *zwei* Photographien von verschiedenen Standorten aus alles Wünschenswerte für den Raumpunkt U angeben kann.

Der Punkt U hat als Bild ebenfalls den Punkt P'; U besitzt denselben Horizontalwinkel α und Vertikalwinkel β wie P; sie ergeben sich aus (9). Da es hier nur darauf ankommt, die *Grundgedanken* der Photo-

grammetrie zu entwickeln, so nehmen wir der Einfachheit halber an, daß der zweite photographische Apparat über einem Punkt O_1 der x-Achse, wo $OO_1 = r$ gemessen ist, aufgestellt sei. Aus der zweiten Photographie erhält man dann wie in (9) den zweiten Horizontalwinkel α_1 (s. Fig. 77a). Im Dreieck $O_1 O U_0$ kennt man nun alle Winkel und $OO_1 = r$; es kann also OU_0 berechnet werden. Man kennt also jetzt von dem „Grundriß" U_0 des Punktes U die Polarkoordinaten OU_0 und α.

Jetzt handelt es sich noch um die Höhe $h = U_0 U$, die für den „Aufriß" wichtig ist. In dem Dreieck SOP, das in Fig. 77b besonders gezeichnet ist, ziehe man UV parallel zu PO und erhält aus dem Dreieck UVS

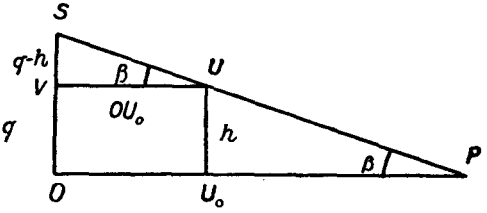

Fig. 77b

$$\frac{q-h}{OU_0} = \operatorname{tg}\beta. \qquad (10)$$

Aus (10) ergibt sich, da β und OU_0 bekannt sind, die Höhe h. Damit sind die Hauptgedanken für die Photogrammetrie entwickelt.

§ 27. Die allgemeine Kollineation

1. Ebene Kollineation

Die Gleichungen (IV) von § 25, welche die allgemeine Zentralprojektion definierten,

$$X = qX', \qquad y = pqT', \qquad T = Y' \qquad (1)$$

sind dadurch charakterisiert, daß die homogenen Koordinaten X, Y, T lineare Funktionen von X', Y', T' sind. Die Gleichungen (1) stellen also einen Spezialfall des folgenden allgemeinen Gleichungssystems dar

$$\begin{aligned} X &= a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}T', \\ Y &= a_{21}X' + a_{22}Y' + a_{23}T', \\ T &= a_{31}X' + a_{32}Y' + a_{33}T', \end{aligned} \qquad (2)$$

wo die a_{ik} reelle Konstanten sind, und noch vorausgesetzt werden soll, daß die Koeffizientendeterminante der a_{ik} von Null verschieden sei. Dann entspricht jedem Punkt (X', Y', T') der Ebene ein einziger Punkt (X, Y, T) der Ebene E und umgekehrt, da die Gleichungen (2) sich nach X', Y', T' auflösen lassen. Die durch (2) vermittelte Abbildung ist dann eineindeutig. Es ist nun nicht schwer, den Charakter dieser Abbildung, welche eine *Kollineation* heißt, näher zu untersuchen. Zunächst ist klar, daß eine Gerade

$$AX + BY + CT = 0 \qquad (3)$$

der Ebene E als Bild in E' wieder eine Gerade ist, da aus (3) eine in X', Y', T' lineare Gleichung entsteht, wenn für X, Y, T die Werte aus (2) in (3) eingetragen werden. Wir untersuchen nun zwei Fälle.

I. Fall. a_{31} und a_{32} sind nicht beide Null (Nichtaffine Kollineation). Dann entspricht der unendlich fernen Geraden $T = 0$ der Ebene E eine im Endlichen gelegene Gerade

$$a_{31}X' + a_{32}Y' + a_{33}T' = 0 \tag{4}$$

der Ebene E', welche wieder die Fluchtgerade von E' heißen soll. Wegen der eineindeutigen Abbildung entspricht dann der unendlich fernen Geraden von E' eine im Endlichen gelegene Gerade der Ebene E — die Fluchtlinie von E.

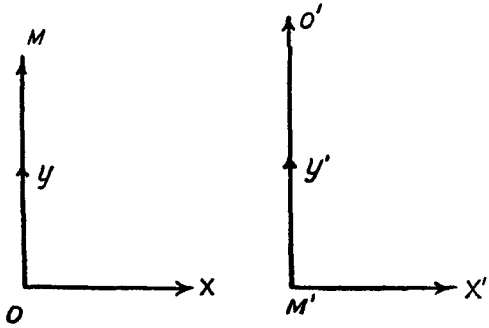

Fig. 78

Nun ist klar, daß, wenn in jeder der beiden Ebenen neue Koordinatensysteme eingeführt werden, die neuen Koordinaten X, Y, T von E sich wieder als lineare Funktionen der neuen Koordinaten X', Y', T' von E' ergeben, und zwar mit nicht verschwindender Determinante. Wir werden nun die neuen Koordinatensysteme in beiden Ebenen so wählen, daß die Gleichungen (2) möglichst einfach werden. Zu diesem Zweck wählen wir als x- bzw. x'-Achse die Fluchtlinien (Fig. 78), dann muß $T' = 0$ auf $Y = 0$ führen, d. h. es muß

$$a_{21} = a_{22} = 0 \tag{5}$$

sein; weiter muß $T = 0$ auf $Y' = 0$ führen, d. h. man hat

$$a_{31} = a_{33} = 0\,. \tag{6}$$

Statt (2) erhält man also

$$\begin{aligned} X &= a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}T', \\ Y &= \qquad\qquad a_{23}T', \\ T &= \qquad a_{32}Y', \end{aligned} \tag{7}$$

wo nun a_{23} und a_{32} von Null verschieden sein müssen. Der unendlich ferne Punkt M eines Lotes auf der x-Achse hat als Bild einen Punkt M' auf der x'-Achse, und der unendlich ferne Punkt O' eines Lotes auf der x'-Achse bildet sich in einen Punkt O der x-Achse ab. Diese Punkte M' und O, die, wie man leicht sieht, im Endlichen liegen, machen wir zu Ursprüngen der Koordinatensysteme: dann muß $X' = 0$, $T' = 0$

auf $X = 0$, $Y = 0$ führen, d. h. es ist $a_{12} = 0$, und die Gleichungen heißen jetzt

$$\begin{aligned} X &= a_{11}X' \qquad + a_{13}T', \\ Y &= \qquad\quad a_{23}T', \\ T &= \quad a_{32}Y'. \end{aligned} \tag{8}$$

$X = 0$, $T = 0$ muß zu $X' = 0$, $Y' = 0$ führen, d. h. es ist $a_{13} = 0$, und es folgt

$$X = a_{11}X', \qquad Y = a_{23}T', \qquad T = a_{32}Y', \tag{9}$$

wo alle Koeffizienten von Null verschieden sein müssen. Da es nur auf die Verhältnisse bei homogenen Koordinaten ankommt, kann $a_{32} = 1$ gesetzt werden, und es folgt

$$X = a_{11}X', \qquad Y = a_{23}T', \qquad T = Y', \tag{10}$$

also Gleichungen von der Form (1). *Die durch eine nichtaffine Kollineation gegebene Abbildung ist also identisch mit einer Zentralprojektion.* Die Gleichungen (2) sind nur deshalb weniger einfach als die Gleichungen (10), weil sie sich auf *allgemein* gelagerte Koordinatensysteme beziehen. Da die durch die Zentralprojektion geleistete Abbildung genügend erörtert ist, so wenden wir uns sogleich zum

II. Fall. $a_{31} = a_{32} = 0$, (*affine Kollineation, Affinität*).

Nach (2) führt $T' = 0$ auf $T = 0$: jeder unendlich ferne Punkt wird also in einen unendlich fernen Punkt abgebildet. Parallelen Geraden in E entsprechen parallele Gerade in E'. Einem Parallelogramm $ABCD$ von E entspricht ein Parallelogramm $A'B'C'D'$ in E' (Fig. 79). Dem Diagonalschnittpunkt O in E entspricht der Diagonalschnittpunkt O' in E'. Einer äquidistanten Punktreihe $(BOD\ldots)$ in E entspricht eine äquidistante Punktreihe in E' $(B'O'D'\ldots)$. Die Gleichungen (2) lauten jetzt

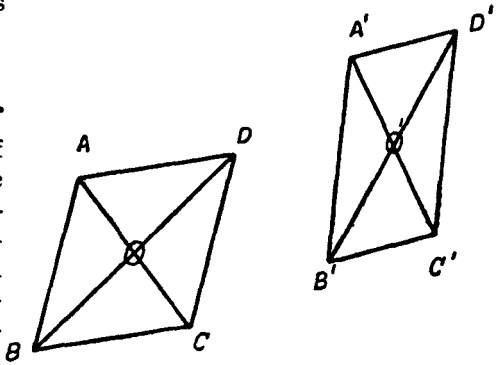

Fig. 79

$$\begin{aligned} X &= a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}T', \\ Y &= a_{21}X' + a_{22}Y' + a_{23}T', \\ T &= \qquad\qquad\quad T'. \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei haben wir $a_{33} = 1$ gesetzt, da es nur auf die Verhältnisse der Koordinaten ankommt. Von jetzt ab verwenden wir inhomogene Koor-

dinaten und erhalten dann

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}, \qquad (12)$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}.$$

Dem Punkt x_0', y_0' von E' entspricht der Punkt x_0, y_0 von E, so daß also gilt

$$x_0 = a_{11}x_0' + a_{12}y_0' + a_{13},$$
$$y_0 = a_{21}x_0' + a_{22}y_0' + a_{23}. \qquad (13)$$

Aus (12) und (13) folgt

$$x - x_0 = a_{11}(x' - x_0') + a_{12}(y' - y_0'),$$
$$y - y_0 = a_{21}(x' - x_0') + a_{22}(y' - y_0'),$$

und, wenn $x - x_0$, $y - y_0$, $x' - x_0'$, $y' - y_0'$ wieder durch x, y, x', y' ersetzt werden, was je einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems entspricht,

$$x = a_{11}x' + a_{12}y',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y'. \qquad (14)$$

Dem Kreis

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (15)$$

der Ebene E entspricht die Kurve zweiter Ordnung

$$(a_{11}x' + a_{12}y')^2 + (a_{21}x' + a_{22}y')^2 = 1, \qquad (16)$$

welche eine (reelle) Ellipse ist, da sie wie der Kreis keine unendlich fernen Punkte besitzt. Parallelen Kreissehnen entsprechen nun parallele Ellipsensehnen und den Mittelpunkten der Kreissehnen, die auf gerader Linie liegen, entsprechen die Mittelpunkte der Ellipsensehnen, die nun auch auf gerader Linie liegen. Konjugierten Durchmessern entsprechen also konjugierte Durchmesser. Den Achsen der Ellipse in E' entsprechen also zwei aufeinander senkrechte Kreisdurchmesser in E. Die Ellipsenachsen und die beiden Kreisdurchmesser wählen wir nun als neue Koordinatenachsen, dann lauten die Abbildungsgleichungen

$$x = a\,x', \qquad y = b\,y', \qquad (17)$$

wo noch durch passende Wahl der positiven Richtungen der Koordinatenachsen angenommen werden kann, daß a und b *positive* Zahlen sind.

Damit ist der Charakter einer affinen Kollineation vollständig klargelegt: es handelt sich nur um Maßstabsänderungen in der Messung der Abszissen und Ordinaten.

2. *Räumliche Kollineation*

Bei der räumlichen Kollineation kann man ähnlich vorgehen wie in der Ebene. Auch hier ist der Gebrauch homogener Koordinaten X, Y, Z, T angezeigt. $T = 0$ bedeutet die Gleichung der unendlich fernen Ebene,

sie ist der Inbegriff aller unendlich fernen Punkte und Geraden des Raumes. Wir verzichten hier auf eine nähere Begründung für die homogenen Koordinaten, um lästigen Wiederholungen auszuweichen. Durch den Ansatz

$$\begin{aligned} X &= a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}Z' + a_{14}T', \\ Y &= a_{21}X' + a_{22}Y' + a_{23}Z' + a_{24}T', \\ Z &= a_{31}X' + a_{32}Y' + a_{33}Z' + a_{34}T', \\ T &= a_{41}X' + a_{42}Y' + a_{43}Z' + a_{44}T' \end{aligned} \tag{18}$$

wird jedem Punkt (X', Y', Z', T') des Raumes R' ein einziger Punkt (X, Y, Z, T) des Raumes R und umgekehrt zugewiesen, wenn die Determinante der Koeffizienten rechts von Null verschieden ist, was wir voraussetzen. Dabei beziehen sich X', Y', Z', T' und X, Y, Z, T auf zwei verschiedene rechtwinklige Koordinatensysteme. Einer Ebene entspricht eine Ebene, einer Geraden eine Gerade. Die durch (18) definierte eineindeutige Abbildung heißt auch hier eine *Kollineation*. Wir unterscheiden auch hier zwei Fälle.

I. Fall. a_{41}, a_{42}, a_{43} *sind nicht alle Null* (*nichtaffine Kollineation*). Der unendlich fernen Ebene $T = 0$ des Raumes R entspricht dann in R' die Ebene

$$a_{41}X' + a_{42}Y' + a_{43}Z' + a_{44}T' = 0,$$

welche im Endlichen liegt und *Fluchtebene von* R' heißt. Ebenso gibt es *in* R *eine Fluchtebene,* das Bild der unendlich fernen Ebene $T' = 0$

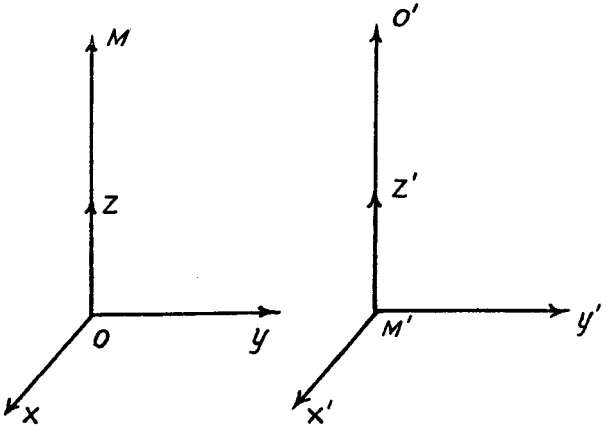

Fig. 80

von R'. Auch hier nehmen die Kollineationsformeln eine einfache Form an, wenn die Fluchtebene in jedem der Räume zu einer Koordinatenebene gemacht wird. Sei also in R' die $x'y'$-Ebene Fluchtebene, so muß

$Z' = 0$ auf $T = 0$ führen, also muß

$$a_{41} = a_{42} = a_{44} = 0 \tag{19}$$

sein. Ist ebenso in R die xy-Ebene die Fluchtebene, so muß $T' = 0$ auf $Z = 0$ führen. Also hat man

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0. \tag{20}$$

Dem unendlich fernen Punkt M eines Lotes auf der xy-Ebene von R entspricht ein Punkt M' der Fluchtebene ($x'y'$-Ebene) von R', und dem unendlich fernen Punkt O' eines Lotes auf der $x'y'$-Ebene von R' entspricht ein Punkt O der Fluchtebene (xy-Ebene) von R. O und M', die, wie man leicht sieht, im Endlichen liegen, machen wir zu Ursprüngen der Koordinatensysteme. Dann muß aus $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$ aus (18) $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$ folgen: es ist also wegen (19)

$$a_{14} = a_{24} = 0. \tag{21}$$

Entsprechend muß $X' = 0$, $Y' = 0$, $T' = 0$ auf $X = Y = Z = 0$ führen. D. h. es ist wegen (20)

$$a_{13} = a_{23} = 0. \tag{22}$$

Die Formeln (18) lauten jetzt nach (19)—(22)

$$\begin{aligned} X &= a_{11}X' + a_{12}Y' \quad , \\ Y &= a_{21}X' + a_{22}Y' \quad , \\ Z &= \quad a_{34}T', \\ T &= \quad a_{43}Z' \quad , \end{aligned} \tag{23}$$

wo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad a_{34} \neq 0, \quad a_{43} \neq 0 \tag{24}$$

sind, damit die Koeffizientendeterminante in (23) von Null verschieden ist. Den Ebenen $X = 0$ bzw. $Y = 0$ von R entsprechen nun in R' die Ebenen

$$\begin{aligned} a_{11}X' + a_{12}Y' &= 0, \\ a_{21}X' + a_{22}Y' &= 0, \end{aligned}$$

welche durch die Z'-Achse gehen und wegen (24) oder der eineindeutigen Abbildung von einander verschieden sind. Dem Büschel von Ebenen durch die Z-Achse

$$X + \lambda Y = 0 \tag{25}$$

(λ Parameter) entspricht in R' das (projektive) Büschel

$$(a_{11}X' + a_{12}Y') + \lambda(a_{21}X' + a_{22}Y') = 0 \tag{26}$$

von Ebenen durch die Z'-Achse. Nun ist bekannt und auch aufs Leichteste zu zeigen, daß es in dem Büschel (25) mindestens ein Paar senkrechter Ebenen gibt, denen in (26) auch zwei senkrechte Ebenen entsprechen: Diese wählen wir als xz und yz bzw. als $x'z'$- und $y'z'$-Ebene.

$X' = 0$ muß dann auf $X = 0$ und $Y' = 0$ auf $Y = 0$ führen. Statt (23) hat man dann

$$X = a_{11}X', \quad Y = a_{22}Y', \quad Z = a_{34}T', \quad T = a_{43}Z'$$

und

$$a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0, \quad a_{34} \neq 0, \quad a_{43} \neq 0.$$

Da es bei den homogenen Koordinaten nur auf die Verhältnisse ankommt, so kann $a_{43} = 1$ gesetzt werden und man hat mit anderer Bezeichnung der Koeffizienten

$$\boxed{X = \alpha X', \quad Y = \beta Y', \quad Z = \gamma T', \quad T = Z'} \tag{27}$$

also ähnliche Formeln wie in (10). Die nichtaffine Kollineation hängt also von drei wesentlichen von Null verschiedenen Konstanten α, β, γ ab, welche als *Invarianten* bezeichnet werden, da zwei verschiedene Kollineationen (18), wenn sie dieselbe „Normalform" (27) besitzen, die beiden Räume auf dieselbe Weise aufeinander abbilden. Es sei noch ausdrücklich betont, daß die Gleichungen (18) nichts anderes besagen als die Gleichungen (27). Die ersteren beziehen sich eben auf *allgemein* gelagerte Koordinatensysteme in R und R'. In der Tat: verschiebt man die Koordinatensysteme, auf die sich (27) beziehen, parallel mit sich, so werden sechs neue Konstante eingeführt; dreht man jetzt jedes System um die neuen Ursprünge, so kommen sechs neue Konstante dazu, so daß man im ganzen mit α, β, γ 15 Konstante hat. Da in (18) mit einer der Größen a_{ik}, die von Null verschieden ist, dividiert werden kann, so hängen die Gleichungen (18) auch von 15 Konstanten ab.

II. Fall. In (18) ist $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$, $a_{44} \neq 0$. *Affine Kollineation, Affinität.*

Diese Abbildung ist für die Mechanik der Kontinua wichtig, indem gezeigt werden kann, daß eine kleine Deformation eines elastischen Kontinuums, geometrisch gesehen, eine Affinität bedeutet.

Da $T = 0$ $T' = 0$ nach sich zieht, so wird jeder unendlich ferne Punkt und jede unendlich ferne Gerade von R in Elemente von R' übergeführt, die auch im Unendlichen liegen. Parallelen Geraden, bzw. Ebenen, entsprechen parallele Gerade bzw. Ebenen. Einem Parallelogramm bzw. einem Parallelepiped entspricht wieder ein Parallelogramm bzw. ein Parallelepiped. Äquidistanten Punktreihen entsprechen ebensolche.

Zur Vereinfachung der Formeln gehen wir ähnlich vor wie in der Ebene. Zunächst kann $a_{44} = 1$ gesetzt werden, so daß die letzte Gleichung in (18) $T = T'$ heißt. Nun gehe man zu *inhomogenen* Koordinaten über und nehme als Ursprünge der Koordinatensysteme irgend zwei entsprechende Punkte, dann erhält man als Abbildungsformeln

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned} \tag{28}$$

Der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{29}$$

des Raumes R entspricht nun die Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')^2 + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')^2 + \\ + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')^2 = 1,$$

welche ein Ellipsoid ist, da alle ihre Durchmesser, die Bilder der Kugeldurchmesser, eine endliche Länge haben. Parallelen Kugelsehnen und ihren Mittelpunkten, die in einer Ebene liegen, entsprechen parallele Ellipsensehnen, und ihre Mitten liegen somit in der der ersten Ebene entsprechenden. Drei konjugierten Kugeldurchmessern entsprechen drei konjugierte Durchmesser des Ellipsoids. Den drei Hauptachsen des Ellipsoids, die spezielle konjugierte Durchmesser sind und auf einander senkrecht stehen, entsprechen bei der Kugel drei konjugierte Durchmesser der Kugel, also auch drei aufeinander senkrecht stehende Gerade. Diese zwei Tripel von einander entsprechenden Geraden wählen wir nun als Achsen neuer Koordinatensysteme in R und R'; dann hat man die *einfachen Abbildungsformeln*

$$\boxed{x = a\,x', \quad y = b\,y', \quad z = c\,z',} \tag{30}$$

wo die drei Konstanten $a, b, c,$ die von Null verschieden sind, als positiv vorausgesetzt werden können, was durch passende Wahl der positiven Richtungen der Achsen bewerkstelligt werden kann. Lagert man die Räume so gegeneinander, daß die entsprechenden Koordinatenachsen sich decken, so besteht der Übergang von Punkten des Raumes R' zu Punkten des Raumes R in drei Kompressionen bzw. Dilatationen parallel zu den Achsen: hierzu tritt noch eine Spiegelung an einer Koordinatenebene, wenn von den beiden Koordinatensystemen das eine ein Rechts-, das andere ein Links-System ist. Ein Spezialfall von der Affinität ist die Ähnlichkeit, wo $a = b = c$ ist, und wo beide Koordinatensysteme gleichartig sind.

Die Formel

$$J = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{31}$$

gibt den Inhalt des Tetraeders der vier Punkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Ersetzt man nach (30) x_i, y_i, z_i durch $a x_i', b y_i', c z_i'$, so sieht man, daß

$$J' = J\,abc$$

ist, wo J' der Inhalt des entsprechenden Tetraeders in R' ist. Daraus folgt: ***Entsprechende Volumina haben konstantes Verhältnis.*** In der *ebenen* Affinität hätte man entsprechend zeigen können, daß ***entsprechende Flächeninhalte konstantes Verhältnis haben.***

§ 28. Die Lorentztransformation und die spezielle Relativitätstheorie

Nach § 27 (27) waren die Formeln für die nichtaffine Raumkollineation

$$X = \alpha X', \qquad Y = \beta Y', \qquad Z = \gamma T', \qquad T = Z'; \tag{1}$$

wir fragen uns nun, ob es im Raume R *nicht eine Kugel gibt, der in R' wieder eine Kugel entspricht.* Die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2AXT + 2BYT + 2CZT + DT^2 = 0 \tag{2}$$

stellt in R die allgemeinste Kugel dar. Nach (1) hat ihr Bild in R' zur Gleichung

$$\alpha^2 X'^2 + \beta^2 Y'^2 + \gamma^2 T'^2 + 2A\alpha X'Z' + 2B\beta Y'Z' + 2C\gamma Z'T' + DZ'^2 = 0\,; \tag{3}$$

soll dies eine Kugel sein, so muß sein

$$\alpha^2 = \beta^2 = D, \qquad A = 0, \qquad B = 0. \tag{4}$$

Also nur bei einer *speziellen*[1]) Kollineation, nämlich, wenn $\alpha = \pm\beta$ ist, gibt es Kugeln des einen Raumes, denen Kugeln im andern Raum entsprechen. Nimmt man $\alpha = \beta$ und schreibt (2) und (3) mit Beachtung von (4) mit inhomogenen Koordinaten, so geht die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Cz + \alpha^2 = 0 \tag{5}$$

des Raumes R in die Kugel

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2C\frac{\gamma}{\alpha^2}z' + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 0 \tag{6}$$

des Raumes R' über, und zwar durch die aus (1) sich ergebenden Formeln

$$x = \frac{\alpha x'}{z'}, \qquad y = \frac{\alpha y'}{z'}, \qquad z = \frac{\gamma}{z'}. \tag{7}$$

Da C willkürlich ist, so stellt (5) ein ganzes Büschel von Kugeln dar; ihre Mittelpunkte liegen auf der z-Achse, und die gemeinsame Potenzebene ist die Fluchtebene $z = 0$. Diese Kugeln gehen durch (7) in das Büschel von Kugeln (6) über, deren Mittelpunkte auf der z'-Achse liegen, und welche die Fluchtebene $z' = 0$ als gemeinsame Potenzebene besitzen. Die Werte $C = \pm\alpha$ entsprechen nach (5) zwei Nullkugeln, denen nach (6) wieder zwei Nullkugeln entsprechen. Statt (5) und (6) kann man

$$x^2 + y^2 + (z + C)^2 = C^2 - \alpha^2 \tag{8}$$

$$x'^2 + y'^2 + \left(z' + \frac{C\gamma}{\alpha^2}\right)^2 = \frac{C^2\gamma^2}{\alpha^4} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \tag{9}$$

schreiben; wir wollen nun aus dem Büschel (8) eine Kugel vom Radius c

[1]) Dieser Spezialfall $\alpha^2 = \beta^2$ ist auch sonst wichtig, da sich zeigen läßt, daß nur, wenn $\alpha^2 = \beta^2$ ist, die beiden Räume in perspektivische Lage gebracht werden können. Vgl. *K. Kommerell*, „Über nichtaffine Raumkollineationen", Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vergg. XXIX (1920), S. 1 ff., und *Salmon-Fiedler-Brill-Kommerell*, Analyt. Geom. d. Raumes, 5. Aufl. 1922, S. 242 ff. und die in der Note 45 dieses Buches angeführte Literatur.

nehmen und versuchen die Konstanten C, α, γ so zu bestimmen, daß die entsprechende Kugel (9) denselben Radius c besitzt. Es muß dann

$$C^2 - \alpha^2 = c^2, \quad \frac{C^2\gamma^2}{\alpha^4} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = c^2$$

sein, oder

$$C^2 = \alpha^2 + c^2, \qquad \gamma^2 = \alpha^4; \tag{10}$$

wir wählen $\gamma = -\alpha^2$ aus Gründen, die wir hier nicht näher ausführen wollen, und die Kugeln lauten nun

$$x^2 + y^2 + (z + \sqrt{\alpha^2 + c^2})^2 = c^2, \tag{11}$$

$$x'^2 + y'^2 + (z' - \sqrt{\alpha^2 + c^2})^2 = c^2, \tag{12}$$

wo die Wurzel hier und im folgenden positiv ausgezogen werden soll; sie werden nach (7) durch die Substitution ($\gamma = -\alpha^2$)

$$x = \frac{\alpha x'}{z'}, \quad y = \frac{\alpha y'}{z'}, \quad z = -\frac{\alpha^2}{z'} \tag{13}$$

in einander übergeführt. Nun setzen wir

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z + \sqrt{\alpha^2 + c^2} = \zeta,$$
$$x' = \xi', \quad y' = \eta', \quad z' - \sqrt{\alpha^2 + c^2} = \zeta',$$

d. h. in beiden Räumen verschieben wir die Koordinatensysteme parallel zur z- bzw. z'-Achse. Dann lauten die Kugelgleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = c^2 \tag{14}$$

und sie werden durch die Transformation

$$\xi = \frac{\alpha\xi'}{\zeta' + \sqrt{\alpha^2 + c^2}}; \quad \eta = \frac{\alpha\eta'}{\zeta' + \sqrt{\alpha^2 + c^2}}, \quad \zeta - \sqrt{\alpha^2 + c^2} = \frac{-\alpha^2}{\zeta' + \sqrt{\alpha^2 + c^2}} \tag{15}$$

ineinander übergeführt.

Jetzt führen wir wieder homogene Koordinaten X, Y, Z, T und X', Y', Z', T' durch

$$\xi = \frac{X}{T}, \quad \eta = \frac{Y}{T}, \quad \zeta = \frac{Z}{T}; \quad \xi' = \frac{X'}{T'}, \quad \eta' = \frac{Y'}{T'}, \quad \zeta' = \frac{Z'}{T'}$$

ein, und die Gleichungen (15) lauten nun, homogen geschrieben

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z'\sqrt{1 + \frac{c^2}{\alpha^2}} + \frac{c^2}{\alpha}T', \quad T = \frac{Z'}{\alpha} + T'\sqrt{1 + \frac{c^2}{\alpha^2}}. \tag{16}$$

Durch diese Formeln wird die Funktion

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - c^2T^2 \tag{17}$$

in die Funktion

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - c^2T'^2 \tag{18}$$

transformiert, wie man sofort sieht. Nun lassen wir die beiden Koordinatensysteme, auf die sich X, Y, Z, T bzw. X', Y', Z', T' beziehen, zusammenfallen, dann wird durch die Formeln (16) die Kugel

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - c^2T^2 = 0 \tag{19}$$

in dieselbe Kugel

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - c^2T'^2 = 0 \tag{20}$$

transformiert. Wir führen weiter statt a eine neue Konstante v ein, indem wir

$$\frac{c^2}{a} = \frac{-v}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{21}$$

setzen. Hieraus ergibt sich

$$+\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}} = \frac{1}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{22}$$

Nun erhalten die Transformationsformeln (16) die Gestalt

$$\boxed{X = X', \quad Y = Y', \quad Z = \frac{Z' - v\,T'}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad T = \frac{T' - \frac{v}{c^2}\cdot Z'}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.} \tag{I}$$

Diese Formeln transformieren die Kugel (19) in die Kugel (20), und zwar die linke Seite von (19) genau (ohne Faktor) in die rechte Seite. Die Gleichungen (I) stellen nun aber, wenn die darin enthaltenen Zeichen passend gedeutet werden, die berühmte *Lorentztransformation* dar, die in der speziellen Relativitätstheorie[1]) eine fundamentale Rolle spielt. Von nun an sollen X, Y, Z *Cartesi*sche Koordinaten und T die Zeit in Sekunden gemessen bedeuten; entsprechend seien X', Y', Z' *Cartesi*sche Koordinaten in bezug auf ein zweites System X', Y', Z', dessen Lagerung zum ersten System sogleich näher angegeben werden soll, T' bedeute ebenfalls die Zeit in Sekunden gemessen; v sei das Zeichen für eine Geschwindigkeit ($< c$) und c die Lichtgeschwindigkeit. Ist nun v im Vergleich zu c sehr klein, so kann man statt (I) mit guter Annäherung

$$\boxed{X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z' - v\,T', \quad T = T'} \tag{II}$$

setzen.

Diesen Gleichungen kann man folgende mechanische Deutung geben: Zur Zeit $T = T' = 0$ sollen die beiden Koordinatensysteme mit ihren bezüglichen Achsen zusammenfallen. Die Gleichungen (II) geben $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$ und entsprechende Punkte fallen zusammen. Nun werde das X, Y, Z-System mit konstanter Geschwindigkeit v parallel zur Z'-Achse verschoben: ein Punkt P, der in Beziehung auf das feste System die Koordinaten X', Y', Z' hat, besitzt nun, wie aus der Fig. 81 unmittelbar hervorgeht, gerade die Koordinaten X, Y, Z, die sich aus (II) ergeben. Die Formeln (II), die in der klassischen Mechanik eine Rolle spielen, definieren eine sog. *Galilei-Transformation*. Die Differen-

[1]) Vgl. *A. Einstein*, „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie", Vieweg 1920.

tialgleichungen der Bewegung sind in der klassischen Mechanik einer Galilei-Transformation gegenüber invariant. Nun gehe zur Zeit $T' = 0 = T$ vom Ursprung O' des festen Systems eine Lichterregung aus; nach T Sekunden ist die Erregung bis zu der Oberfläche der Kugel (Kugelwelle)

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - c^2 T'^2 = 0 \tag{23}$$

gelangt. Wir fragen uns dann: wo wird der in O befindliche, mit dem beweglichen System fest verbundene Beobachter die Grenze der Lichterregung sehen? Mit Hilfe von (II) erhält man aus (23)

$$X^2 + Y^2 + (Z + vT)^2 - c^2 T^2 = 0\,. \tag{24}$$

Das ist auch eine Kugel mit dem Radius cT; sie hat aber ihren Mittelpunkt nicht in O, sondern in O'. Da die Strahlen aus O nach den Punkten der Kugeloberfläche verschiedene Länge haben, so wird für den Beobachter in O die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den verschiedenen Richtungen aus O verschieden ausfallen. Dies widerspricht aber einem berühmten Versuch von *Michelson* und *Morley*, aus dem sich sicher ergibt, daß in einem solchen System XYZ, das sich im oben angegebenen Sinne bewegt, nach allen Richtungen die Lichtgeschwindigkeit denselben Wert c besitzt. Hier treten nun die Formeln (I) in die Lücke. Sie bewirken ja, daß die Kugelwelle (20) oder (23) in die Kugelwelle (19) übergeht. Die letztere hat jetzt ihren Mittelpunkt in O. Bei allen Bewegungen der angeführten Art des XYZ-Systems, wo v gegenüber c nicht klein ist, tritt also *an die Stelle der Galilei-Transformation* (II), *die Lorentztransformation* (I), dies ist der wesentliche Inhalt der *speziellen Relativitätstheorie von Einstein*.

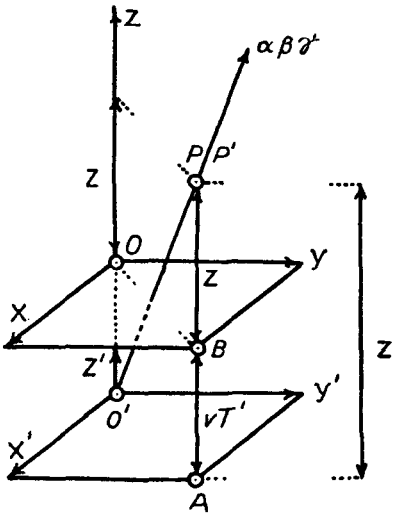

Fig. 81

Um in voller Klarheit zu sehen, daß die Lichtgeschwindigkeit *jetzt* im bewegten System nach allen Richtungen gleich c ist, werde im festen System von O' aus zur Zeit $T' = 0$ ein Lichtsignal nach dem Punkt P (X', Y', Z') gesandt und erreiche vom festen System aus beurteilt den Punkt P in T'-Sekunden, dann hat man

$$X' = cT'\cos\alpha\,, \qquad Y' = cT'\cos\beta\,, \qquad Z' = cT'\cos\gamma\,, \tag{25}$$

wo α, β, γ die Richtungswinkel von $O'P$ gegen die Achsen sind. Nach (I) folgt

$$X = cT'\cos\alpha,\ Y = cT'\cos\beta,\ Z = \frac{(c\cos\gamma - v)\,T'}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ T = \frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\gamma\right)T'}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (26)$$

Das sind die Koordinaten von P und die Zeit T, die der in O mit dem beweglichen System fest verbundene Beobachter feststellt; es ist die Zeit, die *für ihn* das Licht gebraucht hat bis P. $\frac{OP}{T}$ wird für ihn die Geschwindigkeit des Lichtes sein. Nun ist

$$OP^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = T'^2\left\{c^2\cos^2\alpha + c^2\cos^2\beta + \frac{(c\cos\gamma - v)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right\}$$

$$= T'^2\,\frac{c^2\cos^2\alpha + c^2\cos^2\beta - v^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + c^2\cos\gamma - 2vc\cos\gamma + v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= T'^2\,\frac{c^2 + v^2(1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta) - 2vc\cos\gamma}{1-\frac{v^2}{c^2}} = T'^2\,\frac{c^2 - 2vc\cos\gamma + v^2\cos^2\gamma}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= T'^2\,\frac{(c - v\cos\gamma)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

$$OP = T'\cdot\frac{c - v\cos\gamma}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (27)$$

Die Wurzel ist richtig ausgezogen, da nach der letzten Formel (26) $c - v\cos\gamma$ positiv ist. Jetzt folgt nach (26) und (27)

$$\frac{OP}{T} = T'\cdot\frac{c - v\cos\gamma}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} : \frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\gamma\right)T'}{+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c.$$

D. h. der in O befindliche Beobachter konstatiert als Lichtgeschwindigkeit die Größe c, und zwar für jede Richtung.

Die Lorentz-Transformation (I) liefert nun eigentümliche Folgerungen für die Länge bewegter Maßstäbe und Uhren, wenn man sie vom festen System aus beurteilt.

Im bewegten System liege zur Zeit $T' = 0$ auf der $+Z$-Achse ein Maßstab von der Länge $= 1$; sein Anfangspunkt hat dann die Koordinaten $X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$, sein Endpunkt die Koordinaten $X = 0,\ Y = 0,\ Z = 1$. Die Formeln (I) geben dann für den Anfangspunkt $X' = 0,\ Y' = 0,\ Z' = 0$ und für den Endpunkt $X' = 0,\ Y' = 0,\ Z' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$; der Abstand d beider Punkte ist dann, beurteilt vom *festen* System aus,

$$d = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

also kleiner als 1. *Vom festen System aus erscheint also der mit der konstanten Geschwindigkeit v längs der Z'-Achse bewegte Stab verkürzt.*

Nun liege im Ursprung O des bewegten Systems eine Sekundenuhr, und $T = 0$ sowie $T = 1$ seien zwei aufeinanderfolgende Schläge dieser Uhr, so daß für den Beobachter in O genau eine Sekunde verstrichen ist, wie wird diese Zeitspanne einem Beobachter in O' erscheinen? Der Anfang der Zeitspanne ist durch $X = Y = Z = T = 0$ charakterisiert; dies gibt $X' = Y' = Z' = 0$, $T' = 0$. Der Endpunkt des Zeitintervalls ist durch

$$X' = Y' = 0, \quad Z' - v\,T' = 0, \quad 1 = \frac{T' - \frac{v}{c^2} Z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

charakterisiert. Setzt man für Z' den Wert $v\,T'$ in die letzte Gleichung ein, so folgt

$$1 = \frac{T'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{oder} \quad T' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Am Anfang der Zeitspanne, beurteilt vom festen System aus, war $T' = 0$, am Ende

$$T' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

dies ist > 1. *Die Uhr in O, die mit der Geschwindigkeit v längs der z'-Achse bewegt wird, scheint also für den ruhenden Beobachter in O' nachzugehen.*

Löst man die Formeln (I) nach X', Y', Z', T' auf, so folgt

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = \frac{Z + v\,T}{+\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad T' = \frac{T + \frac{v}{c^2} Z}{+\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \text{(I')}$$

und die beiden Systeme haben ihre Rollen vertauscht. Man kann nämlich die Formeln (I'), wenn man sie mit (I) vergleicht, jetzt so auffassen, als ob das xyz-System ruhte, das $x'y'z'$-System sich aber in der Richtung der *negativen* z-Achse parallel mit sich mit der Geschwindigkeit v bewegte, ein Ergebnis, das dem Prinzip der Relativität jeder Bewegung entspricht.

Gruppeneigenschaft der Lorentz-Transformationen

Wir denken uns nun ein drittes System $\xi\eta\zeta$, das sich relativ zum xyz-System parallel zur z-Achse mit der Geschwindigkeit w bewegt, dabei sollen die z-Achse und die ζ-Achse zusammenfallen, und die ξ-Achse sei parallel zur x-Achse. Man hat dann nach (I)

$$\xi = X, \quad \eta = Y, \quad \zeta = \frac{Z - w\,T}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}, \quad \tau = \frac{T - \frac{w}{c^2} Z}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}, \qquad \text{(I'')}$$

wobei τ die Zeit im $\xi\eta\zeta$-System bedeute. Setzt man nun hier aus (I) die Werte für X, Y, Z, T ein, so folgt

$$\xi = X', \quad \eta = Y', \quad \zeta = \frac{Z'\left(1+\frac{v\,w}{c^2}\right) - T'(v+w)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}},$$
$$\tau = \frac{T'\left(1+\frac{v\,w}{c^2}\right) - Z'\left(\frac{v+w}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}. \tag{28}$$

Dividiert man in den beiden letzten Gleichungen Zähler und Nenner rechts mit

$$1+\frac{v\,w}{c^2},$$

beachtet weiter die leicht zu verifizierende Identität

$$\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}{1+\frac{v\,w}{c^2}} \equiv \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v+w}{1+\frac{v\,w}{c^2}}\right)^2} \tag{29}$$

und setzt zur Abkürzung

$$V = \frac{v+w}{1+\frac{v\,w}{c^2}}, \tag{III}$$

so folgt aus (28)

$$\xi = X', \quad \eta = Y', \quad \zeta = \frac{Z' - VT'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \tau = \frac{T' - \frac{V}{c^2}Z'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{I'''}$$

Dies sind aber (abgesehen von der Bezeichnung) genau die Formeln (I), nur steht statt v die Größe V, die durch (III) gegeben ist. D. h. das $\xi\,\eta\,\zeta$-System scheint für den im ruhenden $x'y'z'$-System befindlichen Beobachter mit der Geschwindigkeit V bewegt. V in (III) ist die Resultante von v und w. In der klassischen Mechanik wäre $V = v + w$, wie auch aus (III) folgt, wenn c gegenüber v und w sehr groß ist. In der Relativitätstheorie gilt dagegen (III), wenn v und w im Vergleich zu c nicht klein sind. Die Formel (III) wird durch den berühmten Versuch von *Fizeau* sehr gut bestätigt. Wir gehen darauf nicht näher ein, sondern verweisen auf die obenerwähnte Schrift von *Einstein* (S. 171).

Das gefundene Ergebnis kann nun so formuliert werden: wendet man zuerst eine Lorentz-Transformation mit dem Parameter v an (I) und dann eine zweite (I'') mit dem Parameter w, so können diese beiden durch eine einzige (I''') mit dem Parameter V, der sich aus (III) ergibt, ersetzt werden. Man sagt: ***die Schar von Lorentz-Transformationen besitzt die Gruppeneigenschaft.*** Setzt man weiter $w = -v$, so ist nach

(III) $V = 0$, und aus (I''') folgt

$$\xi = X',\ \eta = Y',\ \zeta = Z',\ \tau = T'$$

eine Transformation, welche die *identische* heißt. Folgt also auf die Transformation v die Transformation $-v$, so hebt diese die Wirkung der ersteren auf. Die Transformation $-v$ heißt die *inverse* der Transformation v. Die Lorentz-Transformationen sind also paarweise invers. Eine Schar von Transformationen, welche 1. *die Gruppeneigenschaft hat,* 2. *zu jeder Transformation die inverse enthält,* bezeichnet man als *Liesche Transformationsgruppe.*

Die Lorentz-Transformationen (I) bilden also eine Liesche Transformationsgruppe, und zwar eine *eingliedrige,* weil sie nur einen Parameter v enthält.

§ 29. Der Satz von Ivory und die deformierbaren Hyperboloide von O. Henrici

Wir wollen jetzt auch Beispiele für die affine Kollineation behandeln. Gegeben sei das dreiachsige Ellipsoid E_1

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a^2 > b^2 > c^2), \tag{1}$$

dann stellt die Gleichung

$$\frac{X^2}{a^2+\lambda} + \frac{Y^2}{b^2+\lambda} + \frac{Z^2}{c^2+\lambda} = 1 \tag{2}$$

für $\lambda > -c^2$ ein zum ersten konfokales Ellipsoid E_2 dar. Durch die *affine Raumkollineation* (vgl. § 27, (30))

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{+\sqrt{a^2+\lambda}}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{+\sqrt{b^2+\lambda}}, \quad \frac{z}{c} = \frac{Z}{+\sqrt{c^2+\lambda}} \tag{3}$$

entspricht jedem Punkt von E_1 ein Punkt von E_2, die entsprechenden Punkte sollen *korrespondierende Punkte* heißen. In den aus (3) sich ergebenden Gleichungen

$$X = \frac{x\sqrt{a^2+\lambda}}{a}, \quad Y = \frac{y\sqrt{b^2+\lambda}}{b}, \quad Z = \frac{z\sqrt{c^2+\lambda}}{c} \tag{4}$$

möge x,y,z ein fester Punkt von E_1 sein; wir lassen nun den Parameter λ alle Werte des Intervalls $\lambda > -c^2$ durchlaufen, dann stellen die Gleichungen (4) den Ort Γ der dem Punkt (x,y,z) korrespondierenden für die ganze Schar von konfokalen Ellipsoiden (2) dar. Es ist nun

$$\frac{dX}{d\lambda} = \frac{x}{2a\sqrt{a^2+\lambda}} = \frac{X}{2(a^2+\lambda)},$$

also

$$\frac{dX}{d\lambda} : \frac{dY}{d\lambda} : \frac{dZ}{d\lambda} = \frac{X}{a^2+\lambda} : \frac{Y}{b^2+\lambda} : \frac{Z}{c^2+\lambda}. \tag{5}$$

Diese Größen sind proportional zu den Richtungskosinus der Tangente an Γ im Punkt (X,Y,Z). Dieselben Größen rechts in (5) sind aber auch

proportional zu den Richtungskosinus der Flächennormalen im Punkt (X, Y, Z) für das Ellipsoid (2). Γ schneidet also alle konfokalen Ellipsoide (2) orthogonal und ist daher die Schnittlinie eines einmantligen und zweimantligen, zu (2) konfokalen Hyperboloids. Man hat so den

Satz 1. Die Orthogonaltrajektorien der konfokalen Ellipsoide (2) schneiden diese in korrespondierenden Punkten.

In der Sprache der Potentialtheorie heißt dieser Satz: *Die Kraftlinien schneiden aus den Äquipotentialflächen der konfokalen Ellipsoide korrespondierende Punkte aus.*

Nun seien (Fig. 82) p_1 und p_2 zwei Punkte von E_1 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2, P_1 und P_2 die korrespondierenden auf E_2 mit den Koordinaten X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2, wir behaupten, daß dann $p_1P_2 = p_2P_1$ ist; dies ist der Satz von *Ivory*. Man hat nämlich mit Benutzung von (4)

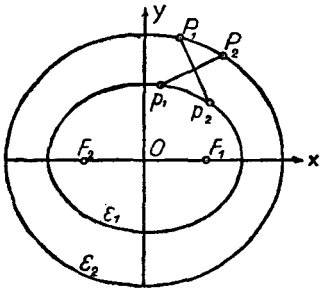

Fig. 82

$$(p_1P_2)^2 = \Sigma(x_1 - X_2)^2 = \sum\left(\frac{ax_1 - x_2\sqrt{a^2+\lambda}}{a}\right)^2,$$

$$(p_2P_1)^2 = \Sigma(x_2 - X_1)^2 = \sum\left(\frac{ax_2 - x_1\sqrt{a^2+\lambda}}{a}\right)^2,$$

wo in den Summen nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben wurde. Es ist jetzt

$$(p_1P_2)^2 - (p_2P_1)^2 = \sum\left\{(x_1^2 - x_2^2) + (x_2^2 - x_1^2)\frac{a^2+\lambda}{a^2}\right\} = \lambda\sum\frac{x_2^2}{a^2} - \lambda\sum\frac{x_1^2}{a^2} = 0,$$

da jede der letzten Summen den Wert 1 hat. Man hat so den

Satz von Ivory. Die Entfernung zweier Punkte, von denen je einer auf einem von zwei konfokalen Ellipsoiden liegt, ist gleich der Entfernung der ihnen korrespondierenden Punkte.

Der Satz von Ivory spielt in der Potentialtheorie eine Rolle: Das Potential eines homogenen dreiachsigen Ellipsoids für einen *inneren* Aufpunkt zu berechnen, ist ziemlich einfach, dagegen recht schwierig, wenn der Aufpunkt ein *äußerer* ist; durch den Satz von *Ivory* kann aber das zweite Problem auf das erste zurückgeführt werden[1]).

Es ist nun klar, daß das bisher Gesagte ganz entsprechend auch für zwei konfokale zweimantlige oder einmantlige Hyperboloide gilt; für den letzteren Fall hätte man dann oben überall $-c^2$ statt c^2 zu setzen. Es sei also

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{-c^2} = 1 \qquad a^2 > b^2 > c^2 \quad (6)$$

[1]) Vgl. z. B. *A. Wangerin*, „Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen", Sammlung Schubert LVIII, I. Bd., 1909, S. 191.

die Gleichung eines einmantligen Hyperboloids H_1, dann ist

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{-c^2+\lambda}=1 \tag{7}$$

für das Intervall

$$\lambda < c^2,\ \lambda > -b^2 \tag{8}$$

die Gleichung eines zu H_1 konfokalen einmantligen Hyperboloids H_2.

Durch die *affine Raumkollineation*

$$\frac{x}{a}=\frac{X}{+\sqrt{a^2+\lambda}},\quad \frac{y}{b}=\frac{Y}{+\sqrt{b^2+\lambda}},\quad \frac{z}{c}=\frac{Z}{\sqrt{c^2-\lambda}} \tag{9}$$

wird nun H_1 in H_2 übergeführt; einer Erzeugenden von H_1 entspricht eine Erzeugende von H_2, da ja bei jeder Kollineation einer Geraden eine Gerade entspricht.

Wir wollen nun zeigen, daß die Punktreihe der Erzeugenden von H_1 mit der Punktreihe der entsprechenden Erzeugenden von H_2 kongruent ist. Zum Beweis seien $(x_1, y_1 z_1)$ und (x_2, y_2, z_2) die Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 von H_1, dann gilt

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{-c^2}=1,\quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{-c^2}=1,\quad \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{-c^2}=1, \tag{10}$$

wobei die letzte Gleichung ausdrückt, daß jeder Punkt in der Tangentialebene des anderen liegt. Sind (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) die Koordinaten der entsprechenden Punkte auf H_2, dann ist nach (9)

$$\frac{x_1}{a}=\frac{X_1}{\sqrt{a^2+\lambda}}=p_1,\quad \frac{y_1}{b}=\frac{Y_1}{\sqrt{b^2+\lambda}}=q_1,\quad \frac{z_1}{c}=\frac{Z_1}{\sqrt{c^2-\lambda}}=r_1; \tag{11}$$

$$\frac{x_2}{a}=\frac{X_2}{\sqrt{a^2+\lambda}}=p_2,\quad \frac{y_2}{b}=\frac{Y_2}{\sqrt{b^2+\lambda}}=q_2,\quad \frac{z_2}{c}=\frac{Z_2}{\sqrt{c^2-\lambda}}=r_2; \tag{12}$$

Mit diesen Abkürzungen p_i, q_i, r_i lauten die Gleichungen (10)

$$p_1^2+q_1^2-r_1^2=1,\quad p_2^2+q_2^2-r_2^2=1,\quad p_1p_2+q_1q_2-r_1r_2=1;$$

hieraus folgt

$$(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2-(r_1-r_2)^2=0.$$

Diese letzte Gleichung kann in die Form gebracht werden:

$$a^2(p_1-p_2)^2+b^2(q_1-q_2)^2+c^2(r_1-r_2)^2=$$
$$=(a^2+\lambda)(p_1-p_2)^2+(b^2+\lambda)(q_1-q_2)^2+(c^2-\lambda)(r_1-r_2)^2;$$

hieraus folgt aber nach (11) und (12)

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2+(Z_1-Z_2)^2,$$

was zu beweisen war.

Zieht man nun auf H_1 eine Anzahl von Erzeugenden der ersten und zweiten Schar, so wird dadurch H_1 in windschiefe Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ usw. eingeteilt; nach (9) entspricht jedem Viereck $A_1B_1C_1D_1$ von H_1 ein Viereck $A_2B_2C_2D_2$ von H_2, so daß ist

$$A_1B_1=A_2B_2,\ B_1C_1=B_2C_2,\ C_1D_1=C_2D_2,\ D_1A_1=D_2A_2.$$

Variiert jetzt in (9) λ stetig von 0 bis λ, so wird $A_1B_1C_1D_1$ stetig in $A_2B_2C_2D_2$ übergeführt: Der Ort aller Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ ist während dieses Vorgangs immer ein einmantliges Hyperboloid, und am Schluß hat man H_2. Werden die Erzeugenden von H_1 durch Stäbe dargestellt, die in ihren Schnittpunkten Gelenke tragen, so ist dieses Stabgerüst, das H_1 darstellt, merkwürdigerweise nicht starr, sondern beweglich und kann immer in andere Hyperboloide übergeführt werden. Das sind die deformierbaren *Hyperboloide von O. Henrici* (1874). Noch möge bemerkt werden, daß diese Deformation keine Verbiegung im Sinne der Flächentheorie ist; denn wohl bleiben die Seiten der Vierecke, nicht aber ihre Winkel ungeändert. (Vgl. die Fig. 83 auf Taf. II.)

§ 30. Der Darboux-Königssche Planigraph und die Hyperboloide von O. Henrici

Eng verknüpft mit den beweglichen Hyperboloiden ist ein räumliches Gelenksystem, das so eingerichtet ist, daß einer der Punkte des Systems eine Ebene beschreibt. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung des Problems der Geradführung. Der Gelenkmechanismus, der *Darboux-Königssche Planigraph* (vgl. Fig. 84 auf Taf. II und Fig. 85) der das Verlangte leistet, kann kurz so beschrieben werden:

Auf einer Stange g_1, die im Raum fest und etwa vertikal sei, seien drei beliebige Punkte A_1, B_1, C_1 gewählt und ebenso auf einer zur Stange g_1 windschiefen Stange g drei beliebige Punkte A, B, C. Die Punktepaare A, A_1; B, B_1; C, C_1 werden nun durch Stangen verbunden, die in den 6 Punkten gelenkig beweglich sind. Durch AA_1, BB_1, CC_1 ist dann eine Regelfläche zweiter Ordnung definiert. Sorgen wir noch dafür, daß die Punktreihen A, B, C und A_1, B_1, C_1 *nicht* ähnlich sind,

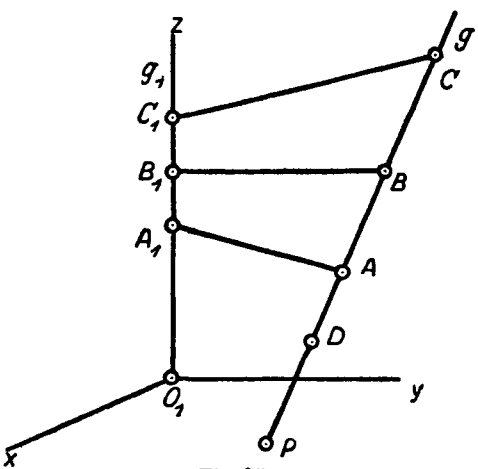

Fig. 85

daß also dem unendlich fernen Punkt P_1 von g_1 in der Projektivität

$$A_1, B_1, C_1 \ldots \overline{\wedge} A, B, C \ldots$$

auf g der im Endlichen gelegene Punkt P entspricht, so ist die Regelfläche kein hyperbolisches Paraboloid, sondern ein einmantliges Hyperboloid.

Nun wissen wir aus dem letzten Paragraphen, daß das Modell (Fig. 85) beweglich ist. Jeder Punkt der beweglichen Stange g, wie A, beschreibt dann eine Kugel, deren Zentrum A_1 auf g_1 liegt. Der Punkt P wird also eine Kugel mit unendlich großem Radius beschreiben, d. h. eine Ebene.

In einer hübschen Studie hat nun *E. J. Nyström*[1]) den Planigraphen unabhängig von den deformierbaren Hyperboloiden *Henricis* synthetisch behandelt; man gelangt dann auf elementarem Wege zu den Hyperboloiden von *Henrici*. Im folgenden sollen die Hauptgedanken dieser Arbeit dargelegt werden (mit teilweise wörtlicher Wiedergabe).

Zunächst werde die Anzahl der Freiheitsgrade des Gelenksystems festgestellt. Die drei Punkte A, B, C bewegen sich auf drei Kugelflächen mit den Zentren A_1, B_1, C_1. Da die Lage eines Punkts auf einer Kugelfläche durch zwei Parameter bestimmt ist, so sind sechs veränderliche Parameter in Betracht zu ziehen. Es müssen aber vier Bedingungen erfüllt sein; denn erstens sind die Strecken AB und BC von vorgeschriebener Länge, und zweitens müssen die Punkte A, B, C in gerader Linie liegen. Da die ersten Bedingungen eine Einschränkung um je einen Parameter mit sich bringen, die letzte Bedingung aber eine solche um zwei Parameter, so erniedrigt sich die Zahl der Freiheitsgrade von sechs auf zwei. Jeder Punkt der Stange g beschreibt somit eine Fläche oder eigentlich ein begrenztes Flächenstück; es soll nun nach *Darboux* gezeigt werden, daß die Flächen *Kugelflächen sind, deren Mittelpunkte auf g_1 liegen.*

Nach den Voraussetzungen definieren die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 ein einmantliges Hyperboloid mit zwei Scharen von Erzeugenden: die Stangen g und g_1 rechnen wir zur ersten Schar, AA_1, BB_1, CC_1 zur zweiten Schar. Der Beweis des *Darboux*schen Satzes gründet sich auf die kinematische Tatsache, daß jede Verrückung einer Strecke EF in eine andere Lage E_1F_1 durch Drehung um eine Achse f zustande gebracht werden kann. Liegen nämlich EF und E_1F_1 in einer Ebene, so ist die Achse das Lot auf der Ebene durch das Momentanzentrum, wobei dieses auch unendlich fern sein kann. Sind aber EF und E_1F_1 windschief, so bestimmen die Mittellotebenen zu EE_1 und FF_1 eine im Endlichen gelegene Gerade f; diese ist die Drehachse; denn dreht man EF um f, so beschreibt E einen Parallelkreis eines Rotationshyperboloids mit der Achse f, der auch durch E_1 geht, F beschreibt einen Parallelkreis, der durch F_1 geht. Dreht man jetzt EF um f, bis E nach E_1 gelangt, so gelangt F nach F_1. Denn von E_1 gibt es zum Parallelkreis des Punktes F nur zwei Strecken, die gleich EF sind; die eine Strecke E_1F_1' ist parallel zu EF, die andere Strecke ist E_1F_1. Weil nun EF bei der Drehung seine Länge nicht ändert, so gelangt es nach E_1F_1, wenn E nach E_1 gekommen ist.

[1]) Societas Scientiarum Fennica. Commentationes Physico-Mathematicae VI. 15 (1932) „Über den Darboux-Königsschen Planigraphen" von *E. J. Nyström*.

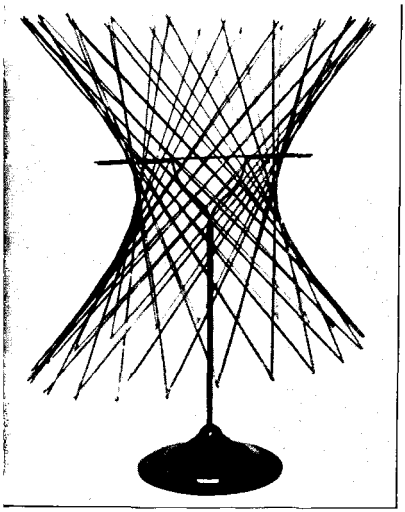

Fig. 83. Deformierbares Hyperboloid von O. Henrici.

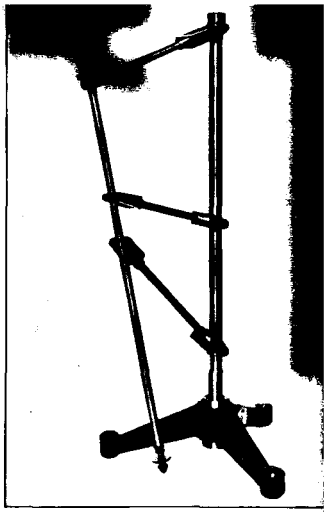

Fig. 84
Darboux-Königscher Planigraph

Zu Seite 179

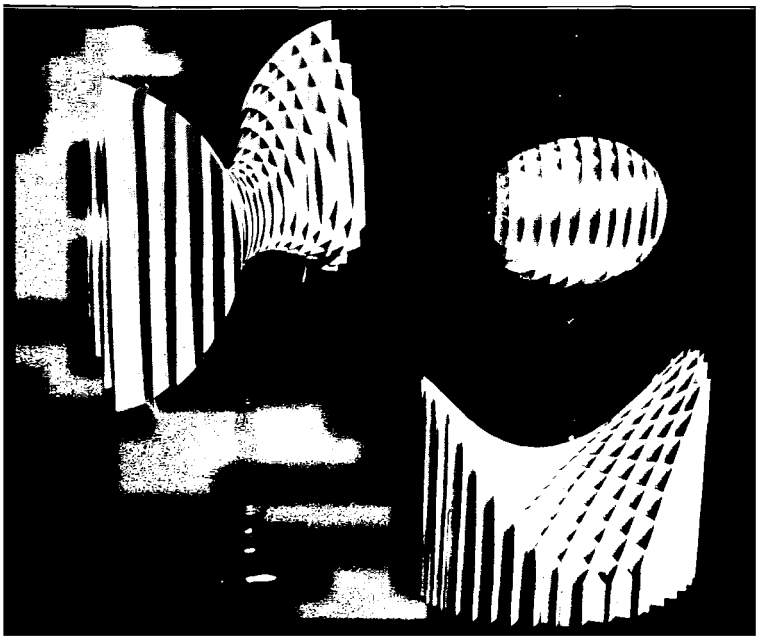

Fig. 86. Kreisschnittmodelle nach A. Brill

Zu Seite 186

Wir betrachten nun zwei benachbarte Lagen der Stange g, von welcher, wie wir annahmen, drei Punkte A, B, C gezwungen sind, auf gewissen Kugelflächen zu bleiben. Wenn diese benachbarten Lagen durch eine Rotation um f ineinander übergeführt werden, bewegen sich die Punkte A, B, C *normal* zu den Ebenen, die durch f und die bezüglichen Punkte A, B, C bestimmt sind. Auch jeder andere Punkt D der Geraden g hat eine zur Ebene (f, D) normale Bewegungsrichtung oder — anders ausgedrückt — *die Drehachse f befindet sich in der Normalebene der Bahnkurve eines jeden Punktes von g.*

Die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 sind zu allen Fortschreitungsrichtungen auf den drei Kugelflächen senkrecht, liegen also jedenfalls in den betreffenden Normalebenen der Bahnkurven und müssen folglich von jeder Drehachse f geschnitten werden. Da der Punkt A in ∞^1 verschiedenen Richtungen auf seiner Kugel fortbewegt werden kann, existieren auch ∞^1 verschiedene Drehachsen, und da alle diese die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 schneiden, fallen sie mit den Erzeugenden der ersten Schar des Hyperboloids zusammen.

Da die Normale d der von irgendeinem Punkt D der Geraden g beschriebenen Fläche auch mit jeder der Drehachsen in je einer Ebene liegt und folglich von ihnen allen geschnitten wird, muß diese Flächennormale d der zweiten Erzeugendenschar des Hyperboloids angehören. Daher trifft sie auch die Gerade g_1, und zwar in einem Punkt D_1, der durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1)$ bestimmt ist. Welche Lage die Geraden g und g_1 zueinander im Raume auch haben mögen, immer ist D_1 derselbe Punkt von g_1, daher gehen alle Flächennormalen der von D beschriebenen Fläche durch den festen Punkt D_1 von g_1: *der Ort für D ist also eine Kugelfläche,* deren Mittelpunkt D_1 auf g_1 liegt, w. z. b. w. Nun folgt wie oben, daß der Punkt P von g, der dem unendlich fernen P_1 von g_1 entspricht, eine Ebene beschreibt. *Hiermit ist die Grundeigenschaft des Planigraphen synthetisch hergeleitet.*

„Da auf der von den Stangen des Planigraphen definierten Hyperboloidfläche diejenigen Teile der Erzeugenden der zweiten Schar, welche zwischen den zwei Geraden g und g_1 der ersten Schar liegen, ihre Längen bei der Deformation des Apparats behalten, und da die beiden Geradenscharen natürlich vollkommen gleichberechtigt sind[1]), kann man auch zwischen die Querstangen beliebig viele Stäbe gelenkig einschalten, welche im Modell die Rolle von Erzeugenden der ersten Schar spielen." Damit sind wir wieder zu den deformierbaren Hyperboloiden von *Henrici* gelangt.

Wir wollen auch noch die interessante analytische Herleitung der Grund-

[1]) Dies wäre noch zu zeigen; denn es wäre doch denkbar, daß durch Einschaltung *eines* Stabs zwischen die Querstangen das System starr würde. Da dieser Punkt aber nebensächlich ist, gehen wir nicht darauf ein.

eigenschaft des Planigraphen nach Nyström geben, wobei wir aber nur im Anfang dem Autor folgen.

Die vertikale Stange g_1 sei die z-Achse eines räumlichen Koordinatensystems (x, y, z). Die Koordinaten des (jetzt beliebigen) Punktes P der Stange g seien ξ, η, ζ, und die Richtungskosinus von g seien l, m, n. Ist x, y, z beliebiger Punkt D von g und $PD = t$, so hat man

$$x = \xi + lt, \quad y = \eta + mt, \quad z = \zeta + nt. \tag{1}$$

Die Punkte A, B, C mögen von P die Abstände t_1, t_2, t_3 haben, und ihre Koordinaten seien durch entsprechende Indizes angedeutet. Es ist somit für $i = 1, 2, 3$

$$x_i = \xi + lt_i, \quad y_i = \eta + mt_i, \quad z_i = \zeta + nt_i, \tag{2}$$

oder nach (1)

$$x_i = x + l(t_i - t), \quad y_i = y + m(t_i - t), \quad z_i = z + n(t_i - t). \tag{3}$$

Wir wollen nun zeigen, daß, wenn die Punkte A, B, C der Geraden g von gewissen Punkten A_1, B_1, C_1 der Geraden g_1 feste Abstände r_i haben, diese Eigenschaft auch allen anderen Punkten von g zukommt, auch wenn der Apparat bewegt wird. Ist O_1 der Ursprung, und ist $O_1A_1 = h_1$, $O_1B_1 = h_2$, $O_1C_1 = h_3$, so erhalten wir als Bedingungen dafür, daß A_1A, B_1B, C_1C konstant und zwar gleich r_1, r_2, r_3 sind, nach (3)

$$\begin{aligned}
&[x + l(t_1 - t)]^2 + [y + m(t_1 - t)]^2 + [z + n(t_1 - t) - h_1]^2 = r_1^2,\\
&[x + l(t_2 - t)]^2 + [y + m(t_2 - t)]^2 + [z + n(t_2 - t) - h_2]^2 = r_2^2,\\
&[x + l(t_3 - t)]^2 + [y + m(t_3 - t)]^2 + [z + n(t_3 - t) - h_3]^2 = r_3^2,
\end{aligned} \tag{4}$$

oder entwickelt, wenn zur Abkürzung

$$\varphi = lx + my + nz \tag{5}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 - 2h_1 z + (t_1 - t)^2 + h_1^2 - r_1^2 - 2nh_1(t_1 - t) + 2(t_1 - t)\varphi = 0,\\
&x^2 + y^2 + z^2 - 2h_2 z + (t_2 - t)^2 + h_2^2 - r_2^2 - 2nh_2(t_2 - t) + 2(t_2 - t)\varphi = 0,\\
&x^2 + y^2 + z^2 - 2h_3 z + (t_3 - t)^2 + h_3^2 - r_3^2 - 2nh_3(t_3 - t) + 2(t_3 - t)\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Wird der Apparat bewegt, so ändern sich l, m, n, ebenso x, y, z, die Koordinaten von D, konstant bleiben t, t_i, h_i, r_i. Nun treten l, m, n in (6) nur in der Verbindung φ auf [vgl. (5)], und außerdem kommt n noch vor. Eliminiert man also n und φ aus (6), so erhält man eine Gleichung für x, y, z, welche die Fläche, die D beschreibt, darstellt. Es folgt so

$$\begin{vmatrix}
x^2 + y^2 + z^2 - 2h_1 z + (t_1 - t)^2 + h_1^2 - r_1^2 & h_1(t_1 - t) & t_1 - t\\
x^2 + y^2 + z^2 - 2h_2 z + (t_2 - t)^2 + h_2^2 - r_2^2 & h_2(t_2 - t) & t_2 - t\\
x^2 + y^2 + z^2 - 2h_3 z + (t_3 - t)^2 + h_3^2 - r_3^2 & h_3(t_3 - t) & t_3 - t
\end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$(x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} 1 & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ 1 & h_2(t_2-t) & t_2-t \\ 1 & h_3(t_3-t) & t_3-t \end{vmatrix} - 2z\begin{vmatrix} h_1 & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ h_2 & h_2(t_2-t) & t_2-t \\ h_3 & h_3(t_3-t) & t_3-t \end{vmatrix} \tag{7}$$
$$+\begin{vmatrix} (t_1-t)^2+h_1^2-r_1^2 & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ (t_2-t)^2+h_2^2-r_2^2 & h_2(t_2-t) & t_2-t \\ (t_3-t)^2+h_3^2-r_3^2 & h_3(t_3-t) & t_3-t \end{vmatrix} = 0.$$

Ist die erste Determinante in (7) von Null verschieden, so stellt (7) eine Kugel, den Ort von D, dar, und zwar eine *reelle*, wenn die Konstanten t, t_i, h_i, r_i einer bestimmten Ausgangslage des Apparats entsprechen, da dann die Kugel einen reellen Punkt, nämlich die Ausgangslage von D besitzt. Der Mittelpunkt D_1 der Kugel liegt auf der z-Achse, und zwar in der Höhe h, die gegeben ist durch

$$h = \begin{vmatrix} h_1 & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ h_2 & h_2(t_2-t) & t_2-t \\ h_3 & h_3(t_3-t) & t_3-t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ 1 & h_2(t_2-t) & t_2-t \\ 1 & h_3(t_3-t) & t_3-t \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Die[1]) Gleichung (8) kann auch in der Form

$$\begin{vmatrix} ht & t & h & 1 \\ h_1t_1 & t_1 & h_1 & 1 \\ h_2t_2 & t_2 & h_2 & 1 \\ h_3t_3 & t_3 & h_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

geschrieben werden. Denn zieht man die mit t multiplizierte dritte und vierte Spalte bezüglich von der ersten und zweiten Spalte ab, so folgt

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & h & 1 \\ h_1(t_1-t) & t_1-t & h_1 & 1 \\ h_2(t_2-t) & t_2-t & h_2 & 1 \\ h_3(t_3-t) & t_3-t & h_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus wieder (8). (9) ist nun eine bilineare Gleichung von der Form

$$Aht + Bt + Ch + D = 0; \tag{10}$$

t war gleich PD und $h = O_1D_1$, wo D_1 der Mittelpunkt der Kugel ist, die D beschreibt. Da in (9) und (10) t_i, h_i entsprechende Werte sind, so sieht man, daß die Punktreihen

$$A_1B_1C_1D_1\ldots \text{ und } ABCD\ldots$$

projektiv sind, daß also in allen Lagen der Stange g die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, $DD_1\ldots$ auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegen, die nach unseren Voraussetzungen ein einmantliges Hyperboloid ist, wobei AA_1, BB_1, CC_1, $DD_1\ldots$ ihre Längen nicht ändern.

[1]) Von jetzt weichen wir von *Nyström* ab, da die a. a. O. gegebene Diskussion nicht vollständig ist.

Soll nun die Kugel (7) eine Ebene darstellen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ 1 & h_2(t_2-t) & t_2-t \\ 1 & h_3(t_3-t) & t_3-t \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ h_2 & h_2(t_2-t) & t_2-t \\ h_3 & h_3(t_3-t) & t_3-t \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

(Die Bedingung (12) fehlt bei *Nyström*.) Entwickelt man (11), so folgt

$$\Sigma (t_2-t)(t_3-t)(h_2-h_3) = 0,$$

wo die anderen Glieder in der Summe durch zyklische Vertauschung der Marken 1, 2, 3 entstehen. Aus der letzten Gleichung folgt, da der Faktor von t^2 gleich Null ist

$$\Sigma t_2 t_3 (h_2-t_3) - t\,\Sigma (t_2+t_3)(h_2-h_3) = 0. \tag{13}$$

Hieraus bestimmt sich ein *endlicher* Wert von t, außer wenn

$$\Sigma (t_2+t_3)(h_2-h_3) = 0$$

ist, oder wenn, wie leicht nachzuweisen ist,

$$\frac{h_2-h_1}{h_3-h_1} = \frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}$$

ist. Dann wären aber die Punktreihen A, B, C und A_1, B_1, C_1 ähnlich gegen die Voraussetzung. Dem endlichen aus (13) sich ergebenden Wert entspricht nun auf g ein Punkt (x, y, z), und dieser beschreibt eine Ebene, wenn (12) erfüllt ist. Wenn nun die Determinante in (12) Null wäre, so würde dies entwickelt geben

$$\Sigma t_2 t_3 h_1 (h_2-h_3) - t\Sigma (t_2+t_3) h_1 (h_2-h_3) = 0.$$

Soll diese Gleichung mit (13) verträglich sein, so muß

$$\begin{vmatrix} \Sigma t_2 t_3 h_1 (h_2-h_3) & \Sigma (t_2+t_3) h_1 (h_2-h_3) \\ \Sigma t_2 t_3 (h_2-h_3) & \Sigma (t_2+t_3)(h_2-h_3) \end{vmatrix} = 0$$

sein. Die Determinante ist aber das Produkt der beiden Matrizen

$$\begin{Vmatrix} t_2t_3 & t_3t_1 & t_1t_2 \\ t_2+t_3 & t_3+t_1 & t_1+t_2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} h_1(h_2-h_3) & h_2(h_3-h_1) & h_3(h_1-h_2) \\ h_2-h_3 & h_3-h_1 & h_1-h_2 \end{Vmatrix},$$

und es ist daher nach dem bekannten Determinantensatz

$$\sum \begin{vmatrix} t_2t_3 & t_3t_1 \\ t_2+t_3 & t_3+t_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_1(h_2-h_3) & h_2(h_3-h_1) \\ h_2-h_3 & h_3-h_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\Sigma t_3^2 (t_2-t_1)(h_2-h_3)(h_3-h_1)(h_1-h_2) = 0$$

oder, da

$$\Sigma t_3^2 (t_2 - t_1) \equiv (t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)$$

ist,

$$(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)(h_2 - h_3)(h_3 - h_1)(h_1 - h_2) = 0;$$

d. h. zwei Punkte von g oder g_1 müßten zusammenfallen. Da dies nicht der Fall ist, so folgt, daß für den aus (13) sich ergebenden Wert (12) erfüllt ist. Damit ist nun gezeigt, *daß der diesem Wert von t entsprechende Punkt* (x, y, z) in (1) *eine Ebene beschreibt.*

§ 31. Die deformierbaren Kreisschnittmodelle der Flächen zweiter Ordnung von A. Brill

Um die Kreisschnitte der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

zu finden, betrachte man den Kegel zweiter Ordnung

$$\varphi(x, y, z) = (a_{11} - \lambda)x^2 + (a_{22} - \lambda)y^2 + (a_{33} - \lambda)z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0; \quad (2)$$

wir wählen nun λ als eine Wurzel der *Hauptachsengleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

die stets drei reelle Wurzeln besitzt, dann zerfällt der Kegel (2) in ein Ebenenpaar. Diese beiden Ebenen und ihre Parallelebenen schneiden die Fläche in Kreisen; denn durch die beiden Kegelschnitte, in denen $\varphi(y, x, z) = 0$ die Fläche $f(x, y, z) = 0$ schneidet, geht auch die Fläche

$$f(x, y, z) - \varphi(x, y, z) = 0,$$

d. h. die Kugel (wenn $\lambda \neq 0$ ist)

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (4)$$

und jene Kegelschnitte sind daher Kreise. Wir beschränken uns auf den Fall, wo die Hauptachsengleichung (3) drei verschiedene Wurzeln besitzt, lassen also die Rotationsflächen und die parabolischen Zylinder beiseite. Ich habe gezeigt[1]), daß die Kreisschnittebenen (2) nur dann reell sind, wenn für λ die *mittlere* Wurzel der Hauptachsengleichung genommen wird, und daß die Kreisschnittebenen auf derjenigen Symmetrieebene von $f(x, y, z) = 0$ senkrecht stehen, die dieser Wurzel zugeordnet ist. Ist die mittlere Wurzel $\lambda = 0$, was beim hyperbolischen Paraboloid der Fall ist, so ist die Kugel (4) in eine Ebene ausgeartet, und die Kreisschnittebenen geben gerade Linien — die Erzeugenden des Paraboloids (vgl. das in der Fußnote[1]) genannte Buch S. 160, 6).

[1]) Vgl. *Salmon-Fiedler-Brill-Kommerell*, Analytische Geometrie des Raumes, 5. Aufl. 1922, S. 155ff.

Beispiel. Das dreiachsige Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \quad a^2>b^2>c^2. \tag{5}$$

Die Hauptachsengleichung lautet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

und die Gleichung (2)

$$\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\lambda\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\lambda\right)z^2=0.$$

Setzt man hier für λ die Größe $\frac{1}{b^2}$, welches die mittlere Wurzel von (6) ist, so folgt

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0 \quad \text{oder} \quad \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-\frac{(b^2-c^2)}{c^2}z^2=0$$

oder

$$\frac{z}{x}=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}. \tag{7}$$

Diese zwei reellen Ebenen und ihre Parallelebenen schneiden aus dem Ellipsoid Kreise heraus; sie stehen, wie es sein muß, auf der der Größe $\frac{1}{b^2}$ zugeordneten Symmetriebene, d. h. auf der xz-Ebene senkrecht.

Die Kreisschnitte der Flächen hat *A. Brill* zur Herstellung schöner Modelle für die Flächen zweiter Ordnung verwendet (Modellsammlung von *M. Schilling*, Leipzig); kreisförmige Kartonscheiben sind in passender Größe und in regelmäßigen Abständen ineinandergesteckt und versinnbildlichen so die beiden Scharen von Kreisen einer Fläche zweiter Ordnung. (Vgl. die Figur 86 auf Tafel II.) Beim hyperbolischen Paraboloid treten an die Stelle der Kreise die beiden Scharen von Erzeugenden.

An diesen Modellen ist noch besonders interessant, daß sie *deformierbar* sind, so daß ein einzelnes Modell eine ganze Reihe von affinen Flächen darstellen kann, die in der Grenze in Kegelschnitte ausarten.

Diese Möglichkeit der Deformation läßt sich theoretisch leicht verstehen. Eine Ebene (Fig. 87) sei in kongruente Rhomben (z. B. $ABCD$) eingeteilt, und die Rhomben mögen in den Ecken Gelenke haben, so daß das Netz noch *affin veränderlich* ist, wobei die Rhomben solche bleiben, und zwar alle miteinander kongruent, und nur die Rhombenwinkel sich ändern. Macht man die Diagonale AC des Rhombus $ABCD$ zur x-Achse, die andere Diagonale BD zur z-Achse und das Lot im Diagonalschnittpunkt O zur Ebene der Rhomben zur y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems xyz, so kann man sich von der Veränderlichkeit der Rhomben eine klare Vorstellung machen: Das

xyz-System sei fest im Raume; wandert nun A auf der x-Achse gegen O, so geht B auf der z-Achse weg von O. Bei der Bewegung wird jede Punktreihe, die auf irgendeiner Rhombenseite liegt, in eine kongruente übergeführt. N sei eine beliebige Rhombusecke, J, K (Fig. 87) zwei Punkte auf der einen durch N gehenden Rhombusseite, L, M zwei Punkte auf der andern durch N gehenden Seite und zwar so, daß

$$JN \cdot NK = LN \cdot NM = a^2 \tag{8}$$

ist. Errichtet man in N das Lot auf der xz-Ebene und trägt auf ihm nach beiden Seiten a ab bis P und P' (nicht gezeichnet), so gehen die Kreise

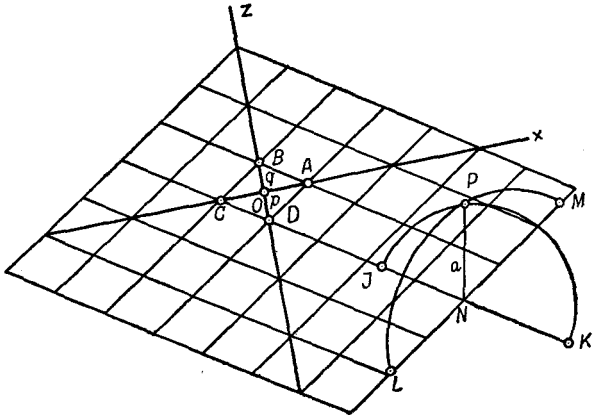

Fig. 87

über den Durchmessern JK und LM, wenn die Kreisebenen senkrecht zur xz-Ebene stehen, wegen (8) durch P und P'. Längs der Geraden PP' seien die Kreise gegeneinander drehbar. Übt man nun die obige Deformation auf das Netz von Rhomben aus, wobei A auf der x-Achse, B auf der z-Achse wandert, so wird dadurch auch eine *affine Raumtransformation* induziert, bei der die y (wie NP) ungeändert bleiben. Die beiden Kreise bleiben bei der Deformation mit sich kongruent. Nun denke man sich z. B. für das dreiachsige Ellipsoid (5), für das die Kreisschnittebenen (7) senkrecht zur xz-Achse stehen, die Kreisschnittebenen in gleichen Abständen gezogen, dann bilden ihre Spuren auf der xz-Ebene ein solches rhombisches Netz. Bei der Deformation (Affinität) geht das Ellipsoid E in ein affines Ellipsoid E' über und jedem Kreis auf E entspricht ein *kongruenter* Kreis auf E'. Damit ist die Deformierbarkeit der *Brill*schen Kreisschnittmodelle erklärt.

Analytische Darstellung

Es ist nützlich, die Affinität auch analytisch darzustellen. In der Fig. 87 sei $OA = p$ und $OB = q$. Nach § 27 (30) hat man für die in Rede stehende Affinität die Formeln

$$x' = \alpha x, \quad y' = y, \quad z' = \beta z; \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0 \tag{9}$$

Der Punkt A $(p, 0, 0)$ geht durch (9) in den Punkt A' $(\alpha p, 0, 0)$ über, und der Punkt B $(0, 0, q)$ geht durch (9) in den Punkt B' $(0, 0, \beta q)$ über. Da nun $A'B' = AB$ sein soll, so folgt

$$\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 = p^2 + q^2 \tag{10}$$

und es ist jetzt von selbst $A'D' = AD$. Durch (9) und (10) ist nun eine einparametrige stetige Schar von Affinitäten der genannten Art definiert. Nun sollen AB und BC parallel zu den Spuren der Kreisschnittebenen des Ellipsoids (5) sein. Wir setzen daher

$$p = a\sqrt{b^2 - c^2}, \qquad q = c\sqrt{a^2 - b^2}; \tag{11}$$

denn die Parallele durch O zu CB hat die Gleichung

$$\frac{z}{x} = \frac{q}{p},$$

eine Gleichung, welche mit (11) in (7) übergeht. Da p und q positive Zahlen sind, so ziehen wir in (11) die Wurzeln positiv aus. Statt (10) schreiben wir

$$\frac{a^2}{\frac{p^2+q^2}{p^2}} + \frac{\beta^2}{\frac{p^2+q^2}{q^2}} = 1$$

und es ist daher, wenn u ein Hilfswinkel ist,

$$\alpha = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p}\cos u, \qquad \beta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}\sin u. \tag{12}$$

Nach (11) ist $p^2 + q^2 = b^2(a^2 - c^2)$, und darum nach (11) und (12)

$$\alpha = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\cos u, \qquad \beta = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}\sin u. \tag{13}$$

Da α und β positiv sein sollen, so ziehen wir die Wurzeln positiv aus und beschränken u auf das Intervall 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Man hat jetzt nach (9) als *Darstellung der Schar von Affinitäten*

$$x' = x\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\cos u, \quad y' = y, \quad z' = z\cdot\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}\sin u. \tag{14}$$

Unter diesen befindet sich auch die *Identität*: sie ist durch $\alpha = \beta = 1$ charakterisiert. Aus (13) folgt für diesen Fall

$$\cos u = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \quad \sin u = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

und es ist $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$. Das Ellipsoid E hatte zu Halbachsen a, b, c; sind a', b', c' die Halbachsen des Ellipsoids, das durch (14) aus E hervorgeht, so hat man eben nach (14)

$$a' = b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\cos u, \qquad b' = b, \qquad c' = b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}\sin u. \tag{15}$$

Unter den Ellipsoiden E' ist auch einmal eine *Kugel*; denn setzt man in (15) $a' = b' = c' = b$, so folgt

$$\cos^2 u = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}, \quad \sin^2 u = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},$$

und es ist $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$.

In der Grenze $u = 0$, bzw. $u = \frac{\pi}{2}$ arten nach (15) die Ellipsoide in Ellipsen aus. Man rechnet nach den gegebenen Formeln leicht nach, daß durch die Affinität (14) die Kreise von E in Kreise von E', dessen Achsen durch (15) gegeben sind, übergehen; da weiter nach (15) $y' = y$ ist, so bleibt bei der Affinität der Radius des einzelnen Kreises ungeändert, d. h. bei der Affinität bleibt jeder Kreis von E starr: er erleidet nur eine Raumverschiebung. Damit ist auch der analytische Teil des Problems erledigt. Es bedarf wohl kaum einer Erwähnung, daß die andern Flächen zweiter Ordnung, insbesondere das hyperbolische Paraboloid bezüglich seiner Geradenscharen, analytisch entsprechend behandelt werden können.

§ 32. Die Spiraltransformation. Konische Spirale

Gegeben sei die logarithmische Spirale

$$r = e^{m\varphi}, \tag{1}$$

wo r, φ Polarkoordinaten der xy-Ebene, und m eine reelle Konstante > 0 seien. Für den Punkt A der Spirale habe φ den Wert u und für B den Wert $u + v$, dann ist $OA = e^{mu}$, $OB = e^{m(u+v)} = e^{mu} \cdot e^{mv}$, $OB = OA \cdot e^{mv}$. Aus dem beliebigen Punkt A der Spirale erhält man also den beliebigen Punkt B der Spirale dadurch, daß man den Radiusvektor OA um den beliebigen Winkel v um O dreht und von dem gedrehten Vektor das e^{mv}-fache nimmt. Diese Transformation werde nun auf den ganzen Raum ausgedehnt. Der Punkt P (X, Y, Z) werde um die z-Achse, wie wenn er mit ihr starr verbunden wäre, um den Winkel v gedreht nach Π (ξ, η, ζ) und dann von $O\Pi$ das e^{mv}-fache genommen, so daß Π nach P' (X', Y', Z') kommt. Man hat so die Gleichungen

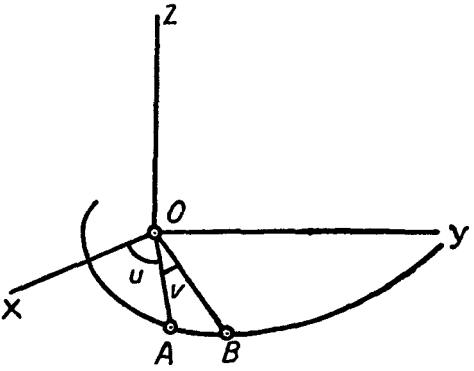

Fig. 88

$$\begin{aligned} \xi &= X\cos v - Y\sin v, & X' &= \xi e^{mv}, \\ \eta &= X\sin v + Y\cos v, & Y' &= \eta e^{mv}, \\ \zeta &= Z, & Z' &= \zeta e^{mv}, \end{aligned}$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} X' &= e^{mv}(X\cos v - Y\sin v), \\ Y' &= e^{mv}(X\sin v + Y\cos v), \\ Z' &= e^{mv} Z. \end{aligned}} \tag{I}$$

Durch diese Transformation, die wir eine *Spiraltransformation* nennen, wird jedem Punkt X, Y, Z des Raumes ein Punkt X', Y', Z' zugewiesen. Da die Spiraltransformation eine Bewegung verbunden mit einer Ähnlichkeitstransformation ist, so ist die Abbildung *winkeltreu*; da weiter der „Parameter" v willkürlich ist, so definieren die Gleichungen (I) eine ganze *Schar* von Transformationen. Zunächst möge v ein *fester* Wert sein; durchläuft nun X, Y, Z eine Kurve Γ, die durch

$$X = \varphi(u), \qquad Y = \psi(u), \qquad Z = \chi(u) \tag{1}$$

gegeben sei, so durchläuft X', Y', Z' eine Kurve Γ', deren Gleichungen man erhält, wenn man aus (1) die Werte für X, Y, Z in (I) einträgt, worauf X', Y', Z' als Funktionen von u definiert sind. Einer Geraden entspricht eine Gerade. Besitzt Γ in P eine Tangente t, so besitzt Γ' in P' eine Tangente t': sie ist das Bild von t. Dies ist bei jeder Ähnlichkeitstransformation der Fall. Da bei der Drehung einer Geraden um die z-Achse und der darauffolgenden Streckung der Neigungswinkel gegen die z-Achse ungeändert bleibt, so folgt der

Satz 1. Entsprechende Geraden haben gegen die z-Achse dieselbe Neigung.

Durchläuft X, Y, Z in (I) eine Fläche, so durchläuft X', Y', Z' ebenfalls eine Fläche. Einer Ebene entspricht eine Ebene.

Nunmehr betrachten wir die *ganze Schar* von Transformationen (I): X, Y, Z seien feste Werte und v durchlaufe stetig alle reellen Werte, dann durchläuft der Bildpunkt X', Y', Z' eine Kurve, die wir eine *Bahnkurve* nennen; ihre Gleichungen sind durch (I) gegeben, wobei v der Kurvenparameter ist. Die Bahnkurve geht auch durch den Ausgangspunkt X, Y, Z; denn für $v = 0$ erhält man aus (I) die *„identische Transformation"* $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z$, was geometrisch von vornherein zu erwarten war. Eine Bahnkurve besitzt in jedem Punkt eine Tangente, da X', Y', Z' für alle Werte von v differenzierbare Funktionen von v sind. Welche Gestalt besitzen nun die Bahnkurven? Zunächst sieht man, daß *jeder Punkt der XY-Ebene* ($Z = 0$) *eine logarithmische Spirale beschreibt*; dies ist geometrisch klar, wenn man sich an den Ausgangspunkt der Spiraltransformation erinnert; analytisch folgt dies aus (I); denn es ergibt sich

$$X'^2 + Y'^2 = e^{2mv}(X^2 + Y^2); \qquad Z' = 0$$

also

$$r' = a e^{mv} \tag{2}$$

wo $r' = +\sqrt{X'^2 + Y'^2}$, $a = +\sqrt{X^2 + Y^2}$ ist; (2) ist die Polargleichung einer logarithmischen Spirale, wo v vom Radiusvektor a an gemessen ist.

Die z-Achse gehört auch zu den Bahnkurven; denn für $X = 0$, $Y = 0$ folgt aus (I) $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = e^{mv} Z$.

Nun soll der *allgemeine* Fall untersucht werden, wo (X, Y, Z) weder in der xy-Ebene noch auf der z-Achse liegt. Es folgt sofort aus Satz 1, daß jeder Punkt eines Rotationskegels, dessen Drehachse die z-Achse ist, und der seine Spitze im Ursprung hat, wieder in einen Punkt dieses Kegels übergeführt wird. Dies ist auch geometrisch unmittelbar klar; übrigens folgt aus (I)

$$\frac{X'^2 + Y'^2}{Z'^2} = \frac{X^2 + Y^2}{Z^2} = \text{const.} \tag{3}$$

also dasselbe. Man hat daher den

Satz 2. Die Bahnkurven liegen auf Drehkegeln, die ihre Spitze im Ursprung und die z-Achse zur Drehachse haben.

Die z-Achse und die xy-Ebene können als besondere Fälle hierfür gelten. Nun betrachte man im Punkt $P\,(X, Y, Z)$ die Mantellinie OP des Kegels und die Tangente t an die durch P gehende Bahnkurve Γ; durch die Transformation (v), die also dem beliebigen Parameterwert v entspricht, geht P in P' über, die Mantellinie OP des Kegels in die Mantellinie OP' und die Tangente t in die Tangente t' in P' an Γ. Da aber die Transformation winkeltreu ist, so bildet t mit OP denselben Winkel, wie t' mit OP'. Die Bahnkurve Γ, die auf dem Kegel liegt, schneidet also die Mantellinien des Kegels unter konstantem Winkel; eine solche Kurve nennt man eine *konische Spirale* (Loxodrome, Schraubenlinie des Drehkegels). Man hat also

Satz 3. Die Bahnkurven sind konische Spiralen; die z-Achse und die logarithmischen Spiralen der xy-Ebene sind ausgeartete Fälle davon.

Die logarithmische Spirale schneidet ja auch alle Radienvektoren unter konstantem Winkel.

Satz 4. Jeder Punkt einer der konischen Spiralen wird durch eine beliebige Spiraltransformation (I) in einen Punkt derselben Spirale übergeführt.

Dies läßt sich auch leicht analytisch zeigen: Üben wir auf den Punkt (X', Y', Z') der konischen Spirale (I), wo also v als Kurvenparameter und X, Y, Z als Konstanten zu betrachten sind, eine Transformation u aus:

$$\begin{aligned} X'' &= e^{mu}\,(X' \cos u - Y' \sin u)\,, \\ Y'' &= e^{mu}\,(X' \sin u + Y' \cos u)\,, \\ Z'' &= e^{mu}\,Z' \end{aligned} \tag{4}$$

so wird durch sie der Punkt (X', Y', Z) in den Punkt (X'', Y'', Z'') übergeführt. Setzt man hier aus (I) die Werte für X', Y', Z' ein, so folgt

$$\begin{aligned} X'' &= e^{m(v+u)}\,[X \cos(v+u) - Y \sin(v+u)]\,, \\ Y'' &= e^{m(v+u)}\,[X \sin(v+u) + Y \cos(v+u)]\,, \\ Z'' &= e^{m(v+u)}\,Z\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Der Punkt (X'', Y'', Z'') liegt aber auch auf der Spirale (I); es ist der Punkt, der dem Parameterwert $v + u$ entspricht. Die Formeln (I), (4), (5) lassen nun aber auch eine andere Deutung zu. Die Transformation (v) in (I) führt (X, Y, Z) in (X', Y', Z') über; übt man auf (X', Y', Z') die Transformation (u) in (4) aus, so geht (X', Y', Z) über in (X'', Y'', Z''). Der Punkt (X, Y, Z) kann aber nach (5) direkt in (X'', Y'', Z'') übergeführt werden durch die Transformation $(u + v)$. Zwei Transformationen nacheinander ausgeführt lassen sich durch eine einzige Transformation ersetzen. *Die Schar von Transformationen* (I) *besitzen also die Gruppeneigenschaft* (vgl. § 28 Schluß). Nimmt man in (5) $u + v = 0$, so ergibt sich die Identität $X'' = X$, $Y'' = Y$, $Z'' = Z$. Setzt man also in (4) statt u die Größe $-v$, so wird $X'' = X$, $Y'' = Y$, $Z'' = Z$ und man hat

$$\begin{aligned} X &= e^{-mv}(\ X' \cos v + Y' \sin v), \\ Y &= e^{-mv}(-X' \sin v + Y' \cos v), \\ Z &= e^{-mv} Z'. \end{aligned} \tag{6}$$

Formeln, die sich auch aus (I) durch Auflösen nach X, Y, Z ergeben. Läßt man also auf (I) die Transformation (6) folgen, so hebt diese die Wirkung von (I) gerade auf. Die Transformationen (I) und (6) sind also *inverse* Transformationen (§ 28). Es gilt also nach § 28 der

Satz 5. Die Spiraltransformationen (I) *bilden eine eingliedrige Liesche Transformationsgruppe.*

Wir nehmen in (I) jetzt für v einen sehr kleinen Wert δv, dann gibt (I) eine Transformation, die nahe an der Identität liegt. Entwickelt man die Funktionen $e^{m\delta v}$, $\cos \delta v$, $\sin \delta v$ in ihre Potenzreihen, so folgt

$$X' = \left(1 + \frac{m\,\delta v}{1} + \ldots\right)\left\{X\left(1 - \frac{(\delta v)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right) - Y\left(\delta v - \frac{(\delta v)^3}{3!} + \ldots\right)\right\},$$

oder umgeordnet

$$X' - X = \delta v\,(mX - Y) + (\delta v)^2(\ \ ) + \ldots$$

analog

$$Y' - Y = \delta v\,(X + mY) + (\delta v)^2(\ \ ) + \ldots$$

$$Z' - Z = \delta v \cdot mZ + (\delta v)^2(\ \ ) + \ldots$$

Setzt man

$$X' - X = \delta X, \qquad Y' - Y = \delta Y, \qquad Z' - Z = \delta Z,$$

und vernachlässigt man die höheren Potenzen von δv, so erhält man nach *Lie* die *infinitesimale Transformation*

$$\delta X = (mX - Y)\,\delta v, \quad \delta Y = (X + mY)\,\delta v, \quad \delta Z = mZ\,\delta v. \tag{7}$$

Jedem Punkt (X, Y, Z) des Raumes ist nach (7) ein Nachbarpunkt $(X + \delta X,\ Y + \delta Y,\ Z + \delta Z)$, zugeordnet, oder jedem Punkt ist ein Linienelement mit den Komponenten $\delta X, \delta Y, \delta Z$ zugewiesen. Will man die Linienelemente zu Kurven zusammenschließen, so hat man

das den Transformationen (7) entsprechende System von Differentialgleichungen

$$\frac{dX}{dv} = mX - Y, \qquad \frac{dY}{dv} = X + mY, \qquad \frac{dZ}{dv} = mZ \tag{8}$$

zu integrieren. Man erhält

$$\begin{aligned} X &= e^{mv}(X_0 \cos v - Y_0 \sin v), \\ Y &= e^{mv}(X_0 \sin v + Y_0 \cos v), \\ Z &= e^{mv} Z_0, \end{aligned} \tag{9}$$

wo X_0, Y_0, Z_0 drei Integrationskonstanten sind. Die Integralkurven sind die konischen Spiralen. (9) und (I) sind abgesehen von der Bezeichnung identisch. Die infinitesimale Transformation (7) ordnet also jedem Punkt (X, Y, Z) das Linienelement der durch ihn gehenden konischen Spirale zu.

Wir wollen nun *noch mit Hilfe der Spiraltransformation die wichtigsten Eigenschaften der konischen bzw. logarithmischen Spiralen ableiten.*

In Fig. 89 werden die Punkte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ der konischen Spirale auf die xy-Ebene nach $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ projiziert, und die Tangenten in $P_1, P_2, P_3 \ldots$, welche die abwickelbare Tangentenfläche der konischen Spirale bilden, mit der xy-Ebene geschnitten, und zwar in R_1, $R_2, R_3 \ldots$; $P_1 Q_1$ geht nun durch eine Spiraltransformation in $P_2 Q_2$ über, nach Satz 3 beschreibt also Q_1 eine logarithmische Spirale. Man hat also den

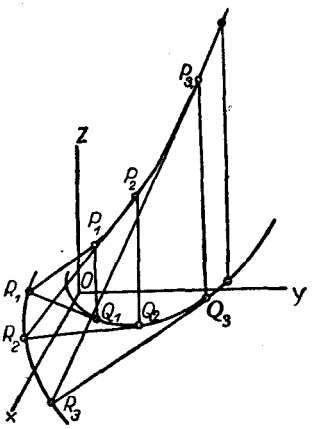

Fig. 89

Satz 6. Jede der konischen Spiralen projiziert sich in die xy-Ebene als logarithmische Spirale.

Nach Satz 1 bilden die Tangenten der konischen Spirale, die ja durch die Spiraltransformation ineinander übergehen, mit der z-Achse einen konstanten Winkel. Man hat also den

Satz 7. Die konische Spirale ist eine Schraubenlinie des Zylinders, der sie in die xy-Ebene projiziert, also geodätische Linie dieses Zylinders. Die Hauptnormale der Spirale ist also die Flächennormale des Zylinders. Der Zylinder ist die rektifizierende Abwicklungsfläche. Für die konische Spirale als Schraubenlinie eines Zylinders ist das Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant.

Die Tangente $P_1 R_1$ geht durch eine Spiraltransformation in $P_2 R_2$ über; nach Satz 3 beschreibt daher R_1 eine logarithmische Spirale. Wickelt man das Dreieck $P_1 Q_1 R_1$ ab von dem Zylinder, bis es in die Lage $P_2 Q_2 R_2$ kommt, so beschreibt R_1 eine Evolvente der konischen

Spirale und eine Evolvente der logarithmischen Spirale. Trägt man von R_1 auf R_1P_1 und von R_2 auf R_2P_2 usw. ein konstantes Stück ab, so ist der Ort der Endpunkte wieder eine Evolvente der konischen Spirale; da aber die Dreiecke $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$ ähnlich sind, so liegen die Endpunkte in einer Ebene parallel zur xy-Ebene und bilden wieder eine logarithmische Spirale. Man hat also den

Satz 8. Die Evolventen einer konischen Spirale sind logarithmische Spiralen, die in Ebenen parallel zur xy-Ebene liegen.

Satz 9. Die Evolvente einer logarithmischen Spirale ist wieder eine logarithmische Spirale.

Weiter sieht man leicht ein, daß der Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise oder Schmiegungskugeln einer konischen Spirale wieder eine konische Spirale ist. Fällt man von O auf die Schmiegungsebene, Normalebene, rektifizierende Ebene einer konischen Spirale das Lot, so ist der Ort der Fußpunkte eine konische Spirale. Die Fußpunktkurve einer logarithmischen Spirale für O als Pol ist wieder eine logarithmische Spirale.

Nimmt man eine beliebige Raumkurve Γ und unterwirft alle ihre Punkte der kontinuierlichen Gruppe der Spiraltransformationen, so beschreibt jeder Punkt von Γ eine konische Spirale, Γ selbst eine Fläche, welche als *Spiralfläche* bezeichnet wird. Die Spiralflächen sind interessante Flächen und flächentheoretisch vielfach untersucht worden. Ihre Gleichungen erhält man, wenn in (I) X, Y, Z als Funktionen eines Parameters u aufgefaßt werden; in (I) sind dann X', Y', Z' Funktionen der Parameter u und v.

§ 33. Die Fokalkegelschnitte

Anläßlich der *Dupin*schen Zykliden in § 24 sind wir zu den *Fokalkegelschnitten* (die entarteten Mäntel der Zentrafläche) und zu dem Satz 22 von *Dupin* gelangt. Die Fokalkegelschnitte bilden nun eine sehr interessante geometrische Figur, die zu schönen Sätzen führt; darum sollen dieser und der nächste Paragraph ihnen gewidmet sein.

Zunächst wollen wir den *Dupin*schen Satz noch einmal sehr einfach elementar beweisen. Er läßt sich aus den Figuren, die *Dandelin* zur Ableitung der Grundeigenschaften der Ellipse und Hyperbel benutzte, unmittelbar ablesen[1]). In das Dreieck ABC der Fig. 90 ist der Kreis M einbeschrieben, der BC in F_1 berührt; ebenso ist der der Seite BC anbeschriebene Kreis M' gezeichnet, F_2 sei der Berührungspunkt. Dreht man nun die Figur um MM' als Achse, so beschreibt AB einen Rotationskegel: aus ihm schneidet die Ebene, die durch BC geht und auf der

[1]) Vgl. *V. u. K. Kommerell*, Analytische Geometrie, I. Teil, 5. Aufl. 1926, S. 197.

Ebene ABC senkrecht steht, eine Ellipse heraus, für die B und C die Scheitel, F_1 und F_2 die Brennpunkte sind (*Dandelin*). Nun suchen wir den Ort der Spitzen A aller Drehkegel, welche durch die Ellipse gehen. Da bekanntlich $F_1F_2 = b - c$ ist, wenn die Seiten (und Winkel) des Dreiecks ABC in der üblichen Weise bezeichnet werden, so ist der Ort von A eine Hyperbel ($b-c = \text{const.}$) in der Ebene des Dreiecks ABC: die Scheitel B und C der Ellipse sind ihre Brennpunkte, und die Brennpunkte F_1 und F_2 der Ellipse ihre Scheitel; die Rotationsachse ist die Tangente an die Hyperbel in der Kegelspitze A, da ja AM den Winkel der Brennstrahlen BA und CA halbiert; die Hyperbelebene steht senkrecht auf der Ellipsenebene. Damit ist schon *die eine Hälfte des Dupinschen Satzes gewonnen.* Die andere Hälfte erhält man durch Betrachtung des Hyperbelschnitts.

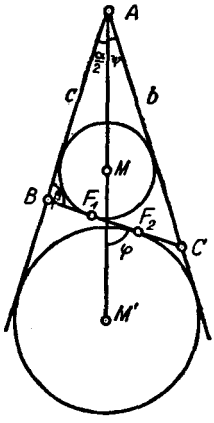

Fig. 90

In der Fig. 91 seien die anbeschriebenen Kreise M, M' des Dreiecks ABC für AB und AC gezeichnet. Dreht man wieder die Figur um MM' als Achse, so beschreibt AB einen Drehkegel, aus dem die durch BC senkrecht zur Ebene ABC gelegte Ebene eine Hyperbel ausschneidet mit den Scheiteln B und C und den Brennpunkten F_1 und F_2, wobei diese Punkte die Berührpunkte von BC und den Kreisen sind (*Dandelin*).

Nun suchen wir wie oben den Ort der Spitzen A aller Drehkegel, welche durch die Hyperbel gehen. Da bekanntlich $F_1F_2 = b + c$ ist, so ist der Ort von A eine Ellipse ($b + c = \text{const.}$) in der Ebene des Dreiecks ABC: die Scheitel B und C der Hyperbel sind ihre Brennpunkte, und die Brennpunkte F_1 und F_2 der Hyperbel ihre Scheitel; die Rotationsachse ist die Tangente an die Ellipse in der Kegelspitze A, da ja AM den Nebenwinkel der Brennstrahlen BA und CA halbiert. Die Ellipsenebene steht senkrecht auf der Hyperbelebene. ***Damit ist die zweite Hälfte des Dupinschen Satzes gewonnen,*** den wir nochmals formulieren:

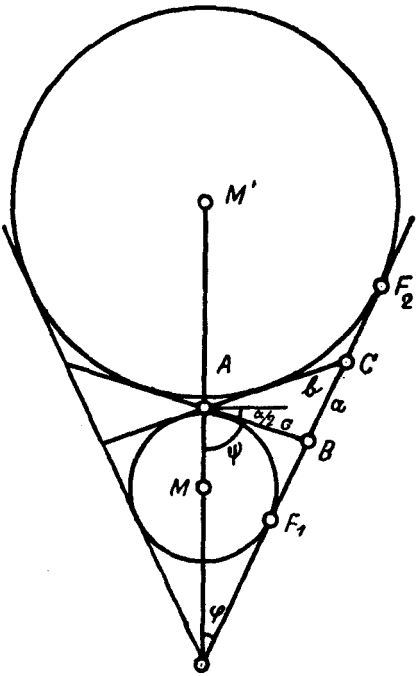

Fig. 91

Satz von Dupin. Jeder der Fokalkegelschnitte wird aus einem beliebigen Punkte des andern durch einen Drehkegel projiziert, wobei die Kegelschnittstangente im Kegelscheitel die Drehachse ist[1]).

Aus den Figuren 90 und 91 läßt sich noch mehr herausholen. Zu diesem Zweck schreiben wir für die Dreiecke ABC die *Mollweid*schen Gleichungen

$$a:(b-c)=\cos\frac{\alpha}{2}:\sin\frac{\beta-\gamma}{2}, \tag{1}$$

$$a:(b+c)=\sin\frac{\alpha}{2}:\cos\frac{\beta-\gamma}{2}, \tag{2}$$

an. Ist in Fig. 90 und 91 φ der spitze Winkel der Ellipsenebene bzw. der Hyperbelebene mit der Drehachse, ψ der erzeugende Winkel des Kegels, so ist in Fig. 90

$$\varphi=180-\beta-\frac{\alpha}{2}=90-\beta+90-\frac{\alpha}{2}=90-\beta+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90-\frac{1}{2}(\beta-\gamma),$$

$$\frac{\alpha}{2}=\psi, \tag{3}$$

in Fig. 91

$$\varphi=\beta-\psi=\beta-\left(90-\frac{\alpha}{2}\right)=\beta-\frac{(\beta+\gamma)}{2}=\frac{\beta-\gamma}{2},\quad \frac{\alpha}{2}=90-\psi. \tag{4}$$

Geht man mit (3) in (1) und mit (4) in (2), so folgt

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}=\frac{b-c}{a}, \tag{5}$$

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}=\frac{b+c}{a}. \tag{6}$$

In Fig. 90 ist aber $b-c=F_1F_2$, $a=BC$; $(b-c):a$ ist also die *numerische Exzentrizität* ε (<1) der Ellipse. In Fig. 91 ist $b+c=F_1F_2$ und $a=BC$; also ist $(b+c):a$ die numerische Exzentrizität ε (>1) der Hyperbel. Für die Parabel ist $\varphi=\psi$ und $\varepsilon=1$.

Für alle Kegelschnitte ist also

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}=\varepsilon, \tag{7}$$

wo ψ der erzeugende Winkel des Kegels, φ der spitze Winkel der Schnittebene mit dem Kegel, und ε die numerische Exzentrizität ist[2]).

---

[1]) In neuerer Zeit hat sich die Unsitte eingebürgert, gewisse Sätze — meist sind es Sätze, welche die betreffenden Mathematiker selbst gefunden haben — als „tiefliegend" zu bezeichnen. Welches ist das Kriterium für „tiefliegend"? Für „gute Freunde" dieser Mathematiker ist es ein Genuß zu zeigen, daß der „tiefliegende" Satz trivial ist. Nach § 24 wäre *Dupins* Satz „halbtiefliegend", hier in diesem Paragraphen trivial.

[2]) Vgl. *V.* und *K. Kommerell*, Analytische Geometrie, I. Teil, 5. Aufl. 1926, S. 116. Dort haben wir auch eine sehr elementare Ableitung der Gleichung (7) gegeben. Dieselbe geometrische Betrachtung findet sich auch bei *Hilbert-Cohn-Vossen*, „Anschauliche Geometrie", 1932, S. 25.

Fokalparabeln. Wir wollen der Vollständigkeit halber *den Dupinschen Satz auch für zwei Fokalparabeln beweisen.* In der Fig. 92 sei $JKHL$ der Grundkreis eines Drehkegels, S seine Spitze und HJ, KL seien zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Grundkreises. EC sei in der Ebene SKL die Parallele zu SK, dann schneidet die Ebene HJC aus dem Kegel eine Parabel aus, für die C der Scheitel und CE die Achse ist. Im Dreieck SEC ist $SC = EC$; ist M die Mitte von SE, so ist $\sphericalangle SMC = 90^0$ und $\sphericalangle SCM = \sphericalangle ECM$. M ist also der Mittelpunkt der *Dandelin*schen Kugel, die dem Rotationskegel einbeschrieben ist und die Schnittebene berührt. Das Lot von M auf EC schneidet aus EC den Berührpunkt F, den Brennpunkt der Parabel aus.

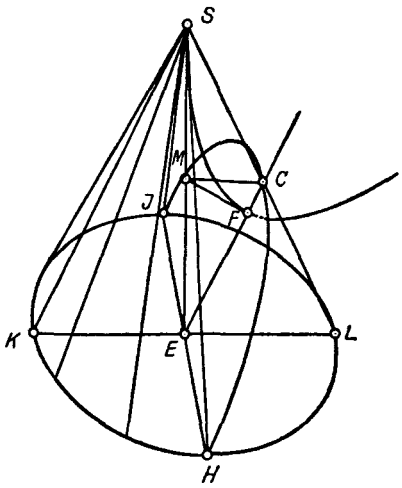

Fig. 92

Wir gehen nun wieder von der Parabel JCH aus und fragen nach dem Ort der Spitzen S aller Drehkegel, welche durch jene Parabel gehen. Jedenfalls liegt S in der Ebene SKL, d. h. in der Ebene, welche durch die Parabelachse CE geht und auf der Parabelebene senkrecht steht. Es läßt sich nun zeigen, daß der Ort für S eine Parabel in jener Ebene ist, für die der Scheitel C der gegebenen Parabel der Brennpunkt, und der Brennpunkt F der gegebenen Parabel der Scheitel ist. Denn MF ist für die Parabel, die in F den Scheitel und in C den Brennpunkt hat, Scheiteltangente. Da nun $SM \perp CM$ ist, so ist nach einem bekannten Parabelsatz MS Tangente an diese Parabel, und nun erhält man den Berührpunkt dadurch, daß man EM um sich selbst über M verlängert. Das gibt aber den Punkt S. Damit ist alles bewiesen: außerdem hat sich ergeben, daß die Drehachse SE des Kegels Tangente an die Parabel im Kegelscheitel S ist. Die beiden Parabeln nennt man Fokalparabeln. Man hat also den

Satz von Dupin. Jede der Fokalparabeln wird aus einem beliebigen Punkte der andern durch einen Drehkegel projiziert, wobei die Parabeltangente im Kegelscheitel die Drehachse ist.

Distanzbeziehungen

In der Fig. 93 liege die Ellipse in der xy-Ebene, ihre Brennpunkte F_1, F_2 und ihre Scheitel S_1, S_2 liegen auf der x-Achse. Die zugehörige Fokalhyperbel liegt dann in der xz-Ebene; F_1, F_2 sind ihre Scheitel, S_1, S_2

ihre Brennpunkte. Die Fokalellipse hat zu Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\qquad z=0\,, \tag{8}$$

die Fokalhyperbel

$$\frac{X^2}{e^2}-\frac{Z^2}{b^2}=1\,,\quad Y=0\,;\quad e^2=a^2-b^2\,, \tag{9}$$

oder in Parameterform

$$x=a\cos u\,,\qquad y=b\sin u\,,\qquad z=0\,, \tag{10}$$

$$X=\frac{e}{\cos v}\,,\qquad Y=0\,,\qquad Z=b\operatorname{tg} v\,. \tag{11}$$

Wir berechnen nun den Abstand ϱ des Ellipsenpunkts (u) vom Hyperbelpunkt v und erhalten nach (10) und (11)

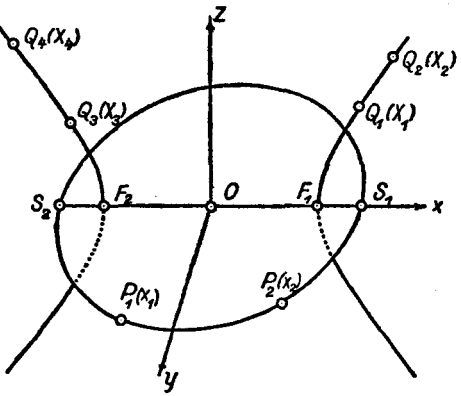

Fig. 93

$$\varrho^2=\left(a\cos u-\frac{e}{\cos v}\right)^2+b^2\sin^2 u+b^2\operatorname{tg}^2 v$$

$$=a^2\cos^2 u-\frac{2\,a\,e\cos u}{\cos v}+\frac{e^2}{\cos^2 v}+b^2\sin^2 u+\frac{b^2\sin^2 v}{\cos^2 v}$$

oder

$$\varrho^2=a^2\cos^2 u-\frac{2\,a\,e\cos u}{\cos v}+\frac{e^2}{\cos^2 v}+b^2\,(1-\cos^2 u)+\frac{b^2\,(1-\cos^2 v)}{\cos^2 v}$$

$$=e^2\cos^2 u-\frac{2\,a\,e\cos u}{\cos v}+b^2+\frac{e^2+b^2}{\cos^2 v}-b^2$$

oder, da nach (9) $e^2+b^2=a^2$ ist,

$$\varrho^2=e^2\cos^2 u-\frac{2\,a\,e\cos u}{\cos v}+\frac{a^2}{\cos^2 v}=\left(e\cos u-\frac{a}{\cos v}\right)^2.$$

Benutzt man (10) und (11), so folgt

$$\varrho^2=\left(\frac{e\,x}{a}-\frac{a\,X}{e}\right)^2=\left(\frac{e^2x-a^2X}{a\,e}\right)^2. \tag{12}$$

Wir wollen nun ϱ als *positive* Größe hieraus bestimmen; es ist also beim Ausziehen der Wurzel auf das Vorzeichen zu achten. Nun ist ϱ stetige Funktion von x, X, die nie Null wird, was geometrisch klar ist und analytisch leicht zu zeigen wäre. Die in der Klammer der Gleichung (12) stehende Funktion hat daher, wenn man auf demselben Hyperbelast bleibt, immer dasselbe Vorzeichen. Darum genügt es für spezielle Werte von x, X das Vorzeichen zu ermitteln. Ist X die Abszisse eines Punkts auf dem *rechten* Hyperbelast, so wählen wir für X den Wert $e(F_1)$ und für x den Wert $a(S_1)$: es ist dann

$$\left.\frac{e^2 x - a^2 X}{a e}\right|_{\substack{x=a \\ X=e}} = \frac{e^2 a - a^2 e}{a e} = e - a < 0 .$$

Für den *linken* Hyperbelast nehmen wir $X = -e$, $x = a$, also

$$\left.\frac{e^2 x - a^2 X}{a e}\right|_{\substack{x=a \\ X=-e}} = e + a > 0 .$$

Man hat daher

$$\varrho = \frac{e^2 x - a^2 X}{a e}, \quad \textit{für den linken Hyperbelast,} \tag{13}$$

$$\varrho = \frac{a^2 X - e^2 x}{a e}, \quad \textit{für den rechten Hyperbelast.} \tag{14}$$

Nun mögen (Fig. 93) P_1, P_2 zwei Ellipsenpunkte, Q_1, Q_2 zwei Punkte auf dem rechten, Q_3, Q_4 zwei Punkte auf dem linken Hyperbelast mit den dort angegebenen Abszissen sein, dann ist nach (13) und (14)

$$\begin{aligned} P_1 Q_3 &= \frac{e^2 x_1 - a^2 X_3}{a e}; & P_1 Q_1 &= \frac{a^2 X_1 - e^2 x_1}{a e} \\ P_2 Q_3 &= \frac{e^2 x_2 - a^2 X_3}{a e}; & P_2 Q_1 &= \frac{a^2 X_1 - e^2 x_2}{a e} \end{aligned} \tag{15}$$

$$P_1 Q_3 - P_2 Q_3 = \frac{e(x_1 - x_2)}{a}, \qquad P_1 Q_1 - P_2 Q_1 = \frac{e}{a}(x_2 - x_1). \tag{16}$$

Laufen Q_3 bzw. Q_1 auf den Hyperbelästen, so bleiben diese *Differenzen konstant*. Nimmt man P_1 und P_2 speziell in S_1 und S_2 an, die ja die Brennpunkte der Hyperbel sind, so hat man als Spezialfall die bekannte Hyperbeleigenschaft. Weiter ist nach den ersten Gleichungen (15)

$$P_1 Q_1 + P_1 Q_3 = \frac{a}{e}(X_1 - X_3); \tag{17}$$

wandert also P_1 auf der Ellipse, so ist *diese Summe konstant*. Nimmt man für Q_3 und Q_1 speziell die Punkte F_1 und F_2 an, die ja die Brennpunkte der Ellipse sind, so erhält man die bekannte Ellipseneigenschaft

$$P_1 F_1 + P_1 F_2 = 2a . \tag{18}$$

Endlich ist

$$P_1Q_1=\frac{a^2X_1-e^2x_1}{ae}, \qquad P_1Q_3=\frac{a^2x_1-a^2X_3}{ae},$$

$$P_1Q_2=\frac{a^2X_2-e^2x_1}{ae}, \qquad P_1Q_4=\frac{a^2x_1-a^2X_4}{ae}, \tag{19}$$

$$P_1Q_1-P_1Q_2=\frac{a}{e}(X_1-X_2), \qquad P_1Q_3-P_1Q_4=\frac{a}{e}(X_4-X_3). \tag{20}$$

Diese *Differenzen bleiben konstant,* wenn P_1 auf der Ellipse läuft.

O. Staude hat die Fokalkegelschnitte in interessanten Arbeiten herangezogen, um Fadenkonstruktionen für die Flächen zweiter Ordnung zu erhalten. Da diese schöne Theorie nicht elementar darstellbar ist, so verweisen wir auf *Salmon-Fiedler-Brill-Kommerell,* Anal. Geom. ds. Rs. 5. Aufl. 1922. II. Tl. S. 435ff. und auf die dort angeführte Literatur.

III. Kapitel

Vektorrechnung und Algebra

§ 34. Die Eulersche Formel. Die Cayleyschen Gleichungen

In diesem Kapitel sollen einige Anwendungen der elementaren Vektorrechnung gegeben werden; meist sind es solche, die sich in den Lehrbüchern nicht finden. Das skalare Produkt bezeichnen wir mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ oder kurz mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, das vektorielle mit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Vektoren werden mit deutschen Buchstaben, ihre Beträge mit lateinischen bezeichnet. Beim Übergang zu Komponenten wird stets ein Rechtssystem benutzt.

Rechenregeln. Es ist

$$\boxed{\begin{gathered}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}), \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = -(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}).\end{gathered}} \tag{I}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}), \\ (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}).\end{gathered}} \tag{II}$$

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}).} \tag{III}$$

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) - \mathfrak{d}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}).} \tag{IV}$$

Diese vier Rechenregeln reichen für sehr viele Zwecke aus.

Drehung eines starren Körpers um eine Achse

Ein starrer Körper sei mit einer raumfesten Achse fest verbunden und werde um diese um den Winkel ϑ gedreht. Die Drehachse sei durch den vom festen Punkt O ausgehenden Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ gegeben. Der Drehwinkel ϑ sei *positiv*, wenn der in O stehende und in der Richtung $\mathfrak{a}$ schauende Beobachter die Drehung der Fortschreitungsrichtung $\mathfrak{a}$ durch eine Rechtsschraube zuordnet. Ein Punkt A des starren Körpers beschreibt bei der Drehung einen Bogen AA' eines Kreises, dessen Mittelpunkt M auf der Drehachse $\mathfrak{a}$ liegt und dessen Ebene senkrecht zu $\mathfrak{a}$ steht. Der Vektor $\mathfrak{r}$, der von O nach A führt und auch mit $\vec{OA}$ bezeichnet

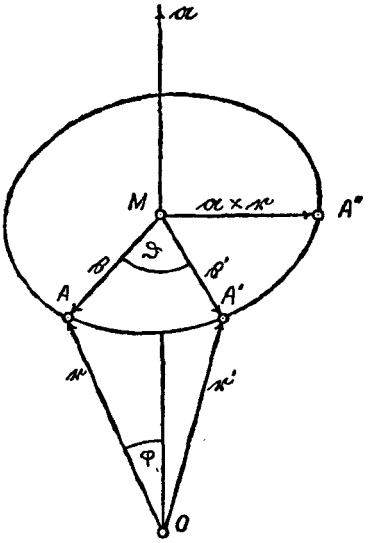

Fig. 94

werde, wird in $\vec{OA'} = \mathfrak{r}'$ übergeführt, und $\sphericalangle AMA'$ ist $= \vartheta$. Es ist nun

$$\vec{OM} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}), \tag{1}$$

$$\vec{MA} = \mathfrak{s} = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}), \tag{2}$$

$$\vec{MA'} = \mathfrak{s}' = \mathfrak{r}' - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}), \tag{3}$$

$$\vec{MA''} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{r}, \tag{4}$$

wobei A'' der Punkt ist, in den A bei einer Drehung um $+\,90^0$ übergeht. Der Vektor $\vec{MA'}$ werde nun in Komponenten nach den Vektoren $\vec{MA}$ und $\vec{MA''}$ zerlegt, diese sind $\mathfrak{s}\cos\vartheta$ und $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})\sin\vartheta$, und darum ist

$$\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}\cos\vartheta + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})\sin\vartheta.$$

Setzt man hier die Werte von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ aus (2) und (3) ein, so folgt

$$\mathfrak{r}' - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) = \{\mathfrak{r} - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\}\cos\vartheta + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})\sin\vartheta$$

also[1])

$$\boxed{\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cos\vartheta + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})\sin\vartheta + \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,(1 - \cos\vartheta).} \tag{V}$$

Hat A in bezug auf ein Rechtssystem, das in O seinen Ursprung hat, die Koordinaten x, y, z (Komponenten von $\mathfrak{r}$), A' die Koordinaten x', y', z', und $\mathfrak{a}$ die Komponenten α, β, γ (Richtungskosinus von OM), so folgt aus (V):

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta + (\beta z - \gamma y)\sin\vartheta + \alpha\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,(1 - \cos\vartheta), \\ y' &= y\cos\vartheta + (\gamma x - \alpha z)\sin\vartheta + \beta\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,(1 - \cos\vartheta), \\ z' &= z\cos\vartheta + (\alpha y - \beta x)\sin\vartheta + \gamma\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,(1 - \cos\vartheta). \end{aligned} \tag{V'}$$

Dies sind die *wichtigen Formeln von Euler*. Zur Einübung der Vektorrechnung ist es nützlich, zu zeigen, daß aus (V) sich $\mathfrak{r}'^2 = \mathfrak{r}^2$, $\mathfrak{a}\mathfrak{r}' = \mathfrak{a}\mathfrak{r}$ ergibt.

Nun soll im Zeitelement Δt der Drehwinkel $\Delta\vartheta$ sein, dann folgt aus (V'), wenn die Potenzreihen von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ benutzt werden,

$$\frac{x' - x}{\Delta t} = (\beta z - \gamma y)\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} + \frac{(\Delta\vartheta)^2}{\Delta t}\{\;\} + \cdots \tag{5}$$

Läßt man Δt gegen Null gehen, so ist

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x' - x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

[1]) Vgl. *Salmon-Fiedler-Brill-Kommerell*, Analytische Geometrie des Raumes, 5. Aufl. 1922, S. 62 unten.

wo $\frac{dx}{dt}$ die x-Komponente der Geschwindigkeit des Punktes A, $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung ist, und darum nach (5)

$$\frac{dx}{dt} = (\beta z - \gamma y)\,\omega, \quad \frac{dy}{dt} = (\gamma x - \alpha z)\,\omega, \quad \frac{dz}{dt} = (\alpha y - \beta z)\,\omega, \tag{6}$$

oder vektoriell geschrieben

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}). \qquad (\mathfrak{v} = \mathfrak{a} \cdot \omega). \tag{7}$$

Dies sind die wichtigen Formeln von *Euler* in der Mechanik. Natürlich hätte man (7) direkt aus (V) durch den entsprechenden Grenzübergang gewinnen können.

Bemerkung. Die Faktoren von $\sin\vartheta$ in (V') sind die Komponenten von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{r} = \overrightarrow{MA''}$; ist also ϱ der Abstand des Punktes A von der Drehachse, so ist

$$\varrho^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2.$$

Als Trägheitsmoment J eines Massensystems in bezug auf $\mathfrak{a}$ als Achse hat man also sofort

$$J = \Sigma m\varrho^2 = \alpha^2 \Sigma m\,(y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m\,(z^2 + x^2) + \gamma^2 \Sigma m\,(x^2 + y^2) - 2\,\beta\gamma\,\Sigma m yz - 2\,\gamma\alpha\,\Sigma m zx - 2\,\alpha\beta\,\Sigma m xy,$$

woraus dann in bekannter Weise die Gleichung für das Trägheitsellipsoid fließt.

Die Gleichungen (V') können noch anders aufgefaßt werden: Man denke sich den Punkt A' (x', y', z') fest mit dem Koordinatensystem verbunden und nun das Koordinatensystem mitsamt A' um die Achse $\mathfrak{a}$ gedreht, dann gelangt A' nach A, und das System xyz geht über in das System x', y', z'. Jetzt bedeuten x, y, z und x', y', z' die Koordinaten eines und desselben Punkts, aber in bezug auf zwei verschiedene Koordinatensysteme. Da nun zwei *Cartesi*sche Systeme mit demselben Ursprung stets durch Drehung um eine Achse zum Zusammenfallen gebracht werden können, so bedeuten die Formeln (V') die *allgemeinste Drehung des Koordinatensystems*. Wir setzen in (V') nun für ϑ die Größe $-\vartheta$ und erhalten

$$\begin{aligned}
x' &= x\{\cos\vartheta + \alpha^2(1-\cos\vartheta)\} + y\{\gamma\sin\vartheta + \alpha\beta(1-\cos\vartheta)\} \\
&\qquad + z\{-\beta\sin\vartheta + \alpha\gamma(1-\cos\vartheta)\}, \\
y' &= x\{-\gamma\sin\vartheta + \beta\alpha(1-\cos\vartheta)\} + y\{\cos\vartheta + \beta^2(1-\cos\vartheta)\} \\
&\qquad + z\{\alpha\sin\vartheta + \beta\gamma(1-\cos\vartheta)\}, \\
z' &= x\{\beta\sin\vartheta + \gamma\alpha(1-\cos\vartheta)\} + y\{-\alpha\sin\vartheta + \gamma\beta(1-\cos\vartheta)\} \\
&\qquad + z\{\cos\vartheta + \gamma^2(1-\cos\vartheta)\},
\end{aligned} \tag{8}$$

wobei also jetzt das $x'y'z'$-System, auf das sich x', y', z' beziehen, aus dem System xyz durch Drehung um den Winkel $+\vartheta$ um die Achse $\mathfrak{a}$ hervorgeht. Da $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ist, so kommen in (8) drei Parameter

vor. Setzt man nun

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}=t \quad \text{also} \quad \cos\vartheta=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\vartheta=\frac{2t}{1+t^2}, \quad 1-\cos\vartheta=\frac{2t^2}{1+t^2},$$

$$\alpha=\frac{p}{t}, \qquad \beta=\frac{q}{t}, \qquad \gamma=\frac{r}{t}, \qquad t^2=p^2+q^2+r^2,$$

so folgt

$$\cos\vartheta=\frac{1-(p^2+q^2+r^2)}{1+p^2+q^2+r^2}, \quad \sin\vartheta=\frac{2\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{1+p^2+q^2+r^2}, \quad 1-\cos\vartheta=\frac{2(p^2+q^2+r^2)}{1+p^2+q^2+r^2}, \tag{9}$$

$$\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \gamma=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \tag{10}$$

wo die Wurzeln alle dasselbe Zeichen haben. Setzt man aus (9) und (10) die Werte in (8) ein, so werden die Koeffizienten von x, y, z in (8), *welche die Koeffizienten der allgemeinsten orthogonalen Substitution* sind, *rationale* Funktionen der drei willkürlichen Parameter p, q, r. Diese so resultierenden Gleichungen für die orthogonale Substitution heißen die *Cayley*schen Gleichungen. Wir schreiben die Koeffizienten in folgender Determinante an.

$$\begin{vmatrix} \frac{1+p^2-q^2-r^2}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(r+pq)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(-q+pr)}{1+p^2+q^2+r^2} \\ \frac{2(-r+qp)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{1-p^2+q^2-r^2}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(p+qr)}{1+p^2+q^2+r^2} \\ \frac{2(q+rp)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(-p+rq)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{1-p^2-q^2+r^2}{1+p^2+q^2+r^2} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Dies ist die allgemeinste orthogonale Determinante mit dem Wert $+1$. Sie hat den Wert $+1$ und nicht -1, weil sie den Übergang eines Systems zu einem *gleichartigen* vermittelt. Identifiziert man die Horizontalreihen mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, so verifiziert man leicht, daß die bekannten Relationen $\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$, $\alpha_i\alpha_k+\beta_i\beta_k+\gamma_i\gamma_k=0$, $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$ usw. erfüllt sind. Für den elementaren Algebraunterricht hat man so Übungsaufgaben, die den Schüler mit dem einfachen Ergebnis überraschen.

§ 35. Umkreisradius eines sphärischen Dreiecks

Wir gehen von folgender Aufgabe aus:

Aus O sollen drei nicht in einer Ebene liegende Richtungen gehen, gesucht ist die Richtung, die mit allen denselben Winkel bildet. Wie groß ist der Winkel?

Die drei Richtungen seien durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bestimmt; deren Endpunkte ABC bestimmen auf der um O mit Radius 1 beschriebenen Kugel ein sphärisches Dreieck; ist M der Mittelpunkt des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises, so ist OM die gesuchte Richtung;

sie bildet mit OA, OB, OC denselben Winkel ϑ. Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ ist $= \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, und der Vektor $\overrightarrow{CB} = \mathfrak{b} - \mathfrak{c}$. Der Vektor

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}), \qquad \text{d. h.}$$

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \qquad (1)$$

gibt sofort die gesuchte Richtung; denn $\mathfrak{A}$ steht auf der Ebene der Vektoren $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} - \mathfrak{c}$, d. h. auf der Ebene ABC senkrecht und geht daher durch M. Dies folgt auch sofort aus (1); denn es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\mathfrak{b} = \mathfrak{A}\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}), \qquad (2)$$

woraus folgt, daß die Projektionen von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ dieselbe Länge haben, nämlich $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$; der Betrag dieser Länge ist $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}| = \frac{1}{6}$ des Tetraeders $OABC$.

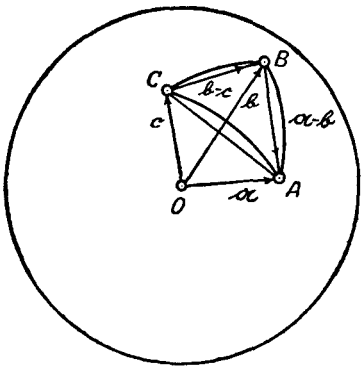

Fig. 95

Um den Winkel ϑ zu berechnen, wird der Betrag von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{A}$ gebildet; dadurch erhält man $A^2 \sin\vartheta$, wenn A der Betrag von $\mathfrak{A}$ ist. Aus $(\mathfrak{A}\mathfrak{a})^2$ erhält man $A^2 \cos^2\vartheta$ und durch Division $\operatorname{tg}^2\vartheta$. Hierbei kommen die Rechenregeln zur Anwendung. Man erhält so nach (1)

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) + \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + \mathfrak{a} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}),$$

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - \mathfrak{b} + \mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + \mathfrak{c} - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{c}). \qquad (3)$$

Bezeichnet man die Seiten des sphärischen Dreiecks mit a, b, c, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \cos c$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \cos b$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \cos a$. Aus (3) folgt jetzt

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{a}\,(\cos c - \cos b) + \mathfrak{b}\,(\cos b - 1) + \mathfrak{c}\,(1 - \cos c)$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{A})^2 = A^2 \sin^2\vartheta = {} & (\cos c - \cos b)^2 + (\cos b - 1)^2 + (1 - \cos c)^2 \\ & + 2\cos c\,(\cos c - \cos b)\,(\cos b - 1) \\ & + 2\cos b\,(\cos c - \cos b)\,(1 - \cos c) \\ & + 2\cos a\,(\cos b - 1)\,(1 - \cos c).\end{aligned}$$

Dies muß eine symmetrische Funktion von $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ sein. Nach leichter Rechnung folgt

$$A^2 \sin^2\vartheta = 2\,(1 - \cos a)\,(1 - \cos b)\,(1 - \cos c) = 16 \sin^2\tfrac{a}{2} \sin^2\tfrac{b}{2} \sin^2\tfrac{c}{2}. \qquad (4)$$

Nach (2) ist

$$A^2 \cos^2\vartheta = (\mathfrak{a}\mathfrak{A})^2 = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})^2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

wo $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ die Komponenten (Richtungskosinusse) der Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind. Aus (5) folgt

$$\begin{aligned} A^2\cos^2\vartheta &= 1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c \\ &= (1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 b\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c \\ &= \sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2 \\ &= (\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a)(\sin b\sin c-\cos b\cos c+\cos a) \\ &= \{\cos(b-c)-\cos a\}.\{\cos a-\cos(b+c)\} \\ &= 2\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\cdot 2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2} \text{ oder} \end{aligned}$$

$$A^2\cos^2\vartheta=(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2=4\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c), \tag{6}$$

wo

$$2s=a+b+c$$

ist. Aus (4) und (6) erhält man die bekannte Formel *für den Umkreisradius ϑ des sphärischen Dreiecks*

$$\operatorname{tg}^2\vartheta=\frac{4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}}{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}. \tag{7}$$

Bemerkung. Aus (6) folgt

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|=2\left|\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}\right|. \tag{8}$$

Die Größe

$$S=+2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} \tag{9}$$

heißt der *Eckensinus* (vgl. S. 209). Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ keine Einheitsvektoren, sondern sind ihre Längen a', b', c', so folgt aus (8) und (9)

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|=a'b'c'\cdot S. \tag{10}$$

Nun ist $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ der positiv genommene Inhalt J des Parallelepipeds, von dem a', b', c' drei in O zusammenstoßende Kanten sind. Man hat also

$$J=a'b'c'\cdot S, \tag{11}$$

eine Formel, die eine Erweiterung der Formel

$$J=bc\cdot\sin a \tag{12}$$

ist, wo J der Inhalt eines Parallelogramms mit den Seiten b, c und dem eingeschlossenen Winkel α ist. An die Stelle des Sinus in (12) tritt in (11) der Eckensinus.

§ 36. Vektorielle Begründung der sphärischen Trigonometrie[1])

Im folgenden soll eine vektorielle Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie gegeben werden, und zwar wird nur das skalare Produkt aus der Vektorrechnung vorausgesetzt. Die Methode ist darum im Grunde genommen äußerst elementar. Es läßt sich zeigen, daß sämtliche Grundformeln, auch die polaren, aus zwei Determinanten abgelesen werden können; es sind die Determinanten, zu denen man bei der Betrachtung eines Systems von drei linear unabhängigen Vektoren und des zugehörigen reziproken Systems geführt wird. Eine Figur brauchen wir nicht. Ein Minimum von geometrischer Anschauung liefert sämtliche Formeln.

P_1, P_2, P_3 seien drei beliebige Punkte auf einer Kugel mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt O. Keiner der drei Punkte sei Gegenpunkt eines anderen, und alle drei Punkte sollen nicht auf einem und demselben Großkreis liegen. Wir verbinden je zwei Punkte P_i auf dem kürzesten Weg durch Großkreisbögen und erhalten so das *„Eulersche"* sphärische Dreieck $P_1P_2P_3$ mit den Seiten s_1, s_2, s_3. Unter den Winkeln w_1, w_2, w_3 verstehen wir die Winkel, welchen die Seiten s_i miteinander in den Ecken bilden; sie sind alle kleiner als π. Von O aus ziehen wir in der Richtung nach P_1, P_2 und P_3 drei Vektoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ von beliebiger Länge p_1, p_2, p_3, so daß also

$$|\mathfrak{p}_i| = p_i$$

ist, wo hier wie im folgenden der Zeiger von 1 bis 3 geht. Die zu $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ *reziproken* Vektoren[2]) $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}^3$ werden dadurch definiert, daß $\mathfrak{p}^i$ auf der Ebene[3]) $\mathfrak{p}_k\mathfrak{p}_l$ senkrecht stehen soll. Die absoluten Beträge der reziproken Vektoren

$$|\mathfrak{p}^i| = p^i$$

werden durch die Forderung

$$\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}^i = 1$$

festgelegt, wo $\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}^i$, wie früher, das Skalarprodukt bedeutet. Dadurch ist zugleich festgesetzt, daß $\mathfrak{p}^i$ mit $\mathfrak{p}_i$ einen spitzigen Winkel bildet, und der Vektor $\mathfrak{p}^i$ ist *eindeutig* definiert. Man hat also

$$\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}^k = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases} \tag{1}$$

und es ist klar, daß die Vektoren $\mathfrak{p}_i$ wieder die reziproken zu den Vektoren $\mathfrak{p}^i$ sind. Die drei Vektoren $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}^3$ durchstoßen die Kugelober-

[1]) Vgl. meine Arbeit im Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigg. Bd. 32, 1923, S. 86ff.

[2]) $\mathfrak{p}^i$ heißt also nicht „$\mathfrak{p}$ hoch i", sondern i ist eine Marke.

[3]) i, k, l bedeuten die Zahlen 1, 2, 3 in irgendeiner Reihenfolge.

fläche in den Punkten P^1, P^2, P^3, welche das *Euler*sche sphärische Dreieck $P^1P^2P^3$ mit den Seiten s^i und den Winkeln w^i bestimmen. Von den beiden Dreiecken $P_1P_2P_3$ und $P^1P^2P^3$ ist das eine das Polardreieck des andern und umgekehrt. Aus der Stereometrie weiß man, daß

$$s_i + w^i = s^i + w_i = \pi, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

ist. Jeden Vektor $\mathfrak{p}^i$ kann man in drei Komponenten nach $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ zerlegen, so daß

$$\mathfrak{p}^i = a^{i1}\,\mathfrak{p}_1 + a^{i2}\,\mathfrak{p}_2 + a^{i3}\,\mathfrak{p}_3, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

ist, wo a^{ik} Skalare sind. Analog kann man $\mathfrak{p}_i$ in Komponenten nach $\mathfrak{p}^1, \mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}^3$ zerlegen und erhält

$$\mathfrak{p}_i = a_{i1}\,\mathfrak{p}^1 + a_{i2}\,\mathfrak{p}^2 + a_{i3}\,\mathfrak{p}^3. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

Die Determinanten

$$A^0 = |a^{ik}| = \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$A_0 = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5'}$$

sind von Null verschieden; denn die Gleichungen (3) z. B. lassen sich, wie (4) zeigt, nach $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ auflösen, also ist $|a^{ik}| \neq 0$; entsprechend zeigt man, daß $|a_{ik}| \neq 0$ ist. Mit Hilfe von (2) ergibt sich aus (3) und (4)

$$a^{ik} = \mathfrak{p}^i\mathfrak{p}^k = a^{ki}, \quad a_{ik} = \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k = a_{ki}, \tag{6}$$

womit alle Koeffizienten in (3) und (4) durch Skalarprodukte ausgedrückt sind. Es ist also nach (6) z. B. vermöge der Definition des Skalarprodukts

$$a^{11} = p^1p^1, \quad a^{12} = p^1p^2\cos s^3, \quad a^{13} = p^1p^3\cos s^2, \tag{7}$$

$$a_{11} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1, \quad a_{12} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cos s_3, \quad a_{13} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3\cos s_2, \text{ usw.}$$

Würde man nach der *Cramer*schen Regel (3) nach $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ auflösen, so folgte

$$\mathfrak{p}_k = \frac{A^{1k}}{A^0}\,\mathfrak{p}^1 + \frac{A^{2k}}{A^0}\,\mathfrak{p}^2 + \frac{A^{3k}}{A^0}\,\mathfrak{p}^3, \tag{8}$$

und entsprechend aus (4)

$$\mathfrak{p}^k = \frac{A_{1k}}{A_0}\,\mathfrak{p}_1 + \frac{A_{2k}}{A_0}\,\mathfrak{p}_2 + \frac{A_{3k}}{A_0}\,\mathfrak{p}_3, \tag{9}$$

wobei A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik} in A_0 und A^{ik} die Unterdeterminante von a^{ik} in A^0 ist. Da nach (6) A_0 und A^0 symmetrisch sind, so ist

$$A_{ik} = A_{ki}; \quad A^{ik} = A^{ki}.$$

Vergleicht man nun (9) mit (3) und ebenso (8) mit (4), so folgt

$$\boxed{\frac{A_{ik}}{A_0}=a^{ik},\quad \frac{A^{ik}}{A^0}=a_{ik}.} \tag{I}$$

Da weiter nach einem bekannten Determinantensatz

$$a^{1i}A^{1k}+a^{2i}A^{2k}+a^{3i}A^{3k}=\begin{cases}0 & \text{für } i\neq k,\\ 1 & \text{für } i=k.\end{cases}$$

ist, so folgt[1]) nach (I)

$$\boxed{a^{1i}\,a_{1k}+a^{2i}\,a_{2k}+a^{3i}\,a_{3k}=\begin{cases}0 & \text{für } i\neq k,\\ 1 & \text{für } i=k.\end{cases}} \tag{II}$$

Ersetzt man nun in (I) und (II) nach (7) die a_{ik} und a^{ik}, so fallen die p_i und p^i heraus und man erhält, wie eingangs schon gesagt wurde, sämtliche Grundformeln der sphärischen Trigonometrie. Zunächst berechnen wir A_0 und A^0. Aus (5′) erhält man nach (7):

$$A_0=\begin{vmatrix} p_1p_1 & p_1p_2\cos s_3 & p_1p_3\cos s_2\\ p_2p_1\cos s_3 & p_2p_2 & p_2p_3\cos s_1\\ p_3p_1\cos s_2 & p_3p_2\cos s_1 & p_3p_3\end{vmatrix}=p_1p_2p_3\begin{vmatrix}1 & \cos s_3 & \cos s_2\\ \cos s_3 & 1 & \cos s_1\\ \cos s_2 & \cos s_1 & 1\end{vmatrix} \tag{10}$$

$$=4\,(p_1p_2p_3)^2\sin s_0\sin(s_0-s_1)\sin(s_0-s_2)\sin(s_0-s_3),$$

wo

$$2\,s_0=s_1+s_2+s_3$$

ist. Die Determinante rechts in (10) ist uns schon in § 35, (5) begegnet, wo auch die Umformungen, die von § 35, (5) zu § 35, (6) führten, angegeben sind. Entsprechend ist

$$A^0=\begin{vmatrix} p^1p^1 & p^1p^2\cos s^3 & p^1p^3\cos s^2\\ p^2p^1\cos s^3 & p^2p^2 & p^2p^3\cos s^1\\ p^3p^1\cos s^2 & p^3p^2\cos s^1 & p^3p^3\end{vmatrix} \tag{11}$$

$$=4\,(p^1p^2p^3)^2\sin s^0\sin(s^0-s^1)\sin(s^0-s^2)\sin(s^0-s^3),$$

wo

$$2\,s^0=s^1+s^2+s^3$$

ist. Wie in § 35, (9) setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}S_0&=+2\sqrt{\sin s_0\sin(s_0-s_1)\sin(s_0-s_2)\sin(s_0-s_3)},\\ S^0&=+2\sqrt{\sin s^0\sin(s^0-s^1)\sin(s^0-s^2)\sin(s^0-s^3)},\end{aligned} \tag{12}$$

und nennen S_0 den *Eckensinus*, S^0 den *Polareckensinus*; es ist klar und wird sich auch sogleich ergeben, daß beide reelle und von Null verschiedene Größen sind. Nach (10) und (11) ist jetzt

$$A_0=(p_1p_2p_3)^2\,S_0^2,\quad A^0=(p^1p^2p^3)^2\,S^{0^2}. \tag{13}$$

[1]) (II) ergibt sich auch dadurch, daß man die Werte für p^i und p_k aus (3) und (4) in (1) einträgt.

Nach § 35, (11) ist $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3)\,S_0$ der sechsfache Inhalt des Tetraeders, von dem $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ drei in O zusammenstoßende Kanten sind. Entsprechend ist $(\mathfrak{p}^1\mathfrak{p}^2\mathfrak{p}^3)\,S^0$ der sechsfache Inhalt des Tetraeders, von dem $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}^3$ drei in O zusammenstoßende Kanten sind.

1. *Sinussatz*

Den Sinussatz erhält man, wenn in (I) $i = k$ gesetzt wird. Nimmt man z. B. $i = k = 1$, so folgt aus der ersten Formel (I)

$$\frac{A_{11}}{A_0} = a^{11}$$

und jetzt nach (10) und (7)

$$\frac{1}{A_0}\begin{vmatrix} \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\cos s_1 \\ \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_2\cos s_1 & \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{p}^1\mathfrak{p}^1$$

oder

$$(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3)^2\sin^2 s_1 = (\mathfrak{p}^1)^2\,A_0$$

oder nach (13)

$$\sin^2 s_1 = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}^1)^2\,S_0^2, \quad \sin^2 s^1 = (\mathfrak{p}^1\mathfrak{p}_1)^2\,S^{0^2},$$

wobei die zweite Gleichung entsprechend wie die erste gefunden wird, wenn die zweite Formel (I) mit $i = k = 1$ verwendet wird. Hieraus folgt:

$$\sin s_1 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}^1\,S_0, \quad \sin s^1 = \mathfrak{p}^1\mathfrak{p}_1\,S^0. \tag{14}$$

Da $\sin s_1$, $\sin s^1$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}^1$ reelle, positive und von Null verschiedene Größen sind, so ist beim Wurzelziehen das Vorzeichen richtig gewählt worden, und S_0, S^0 sind reelle, positive und von Null verschiedene Größen, wie schon oben bemerkt wurde.

Aus den Gleichungen (14), die man aus (I) mit $i = k = 2$ und $i = k = 3$ oder durch zyklische Vertauschung erhält, ergibt sich

$$\frac{1}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}^1} = \frac{S_0}{\sin s_1} = \frac{S^0}{\sin s^1}; \quad \frac{1}{\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}^2} = \frac{S_0}{\sin s_2} = \frac{S^0}{\sin s^2}; \quad \frac{1}{\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}^3} = \frac{S_0}{\sin s_3} = \frac{S^0}{\sin s^3} \tag{15}$$

oder

$$\sin s_1 : \sin s_2 : \sin s_3 = \sin s^1 : \sin s^2 : \sin s^3, \tag{16}$$

oder nach (2)

$$\sin s_1 : \sin s_2 : \sin s_3 = \sin w_1 : \sin w_2 : \sin w_3,$$

oder in der üblichen Bezeichnung

$$\boxed{\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.} \tag{Ia = Ib}$$

Das ist der *Sinussatz*: er ist zu sich selbst polar, wie (16) am deutlichsten zeigt. Nach (1) ist

$$\frac{1}{\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}^i} = \sin h_i = \sin h^i,$$

wo h_i, h^i die bezüglichen Höhen der beiden sphärischen Dreiecke bedeuten.

2. Cosinussatz

Setzt man in (I) $i \neq k$, so erhält man wegen der Symmetrie der Determinanten aus der ersten Formel drei Gleichungen und ebenso aus der zweiten. Setzt man z. B. in der ersten Formel (I) $i = 3$, $k = 2$, also

$$\frac{A_{32}}{A_0} = a^{32},$$

so folgt nach (10) und (7)

$$-\frac{1}{A_0}\begin{vmatrix} p_1 p_1 & p_1 p_3 \cos s_2 \\ p_2 p_1 \cos s_3 & p_2 p_3 \cos s_1 \end{vmatrix} = p^3 p^2 \cos s^1$$

oder

$$(p_1)^2 p_2 p_3 (\cos s_1 - \cos s_2 \cos s_3) = -A_0 p^3 p^2 \cos s^1$$

oder nach (13)

$$\cos s_1 - \cos s_2 \cos s_3 = -S_0^2 p_2 p^2 p_3 p^3 \cos s^1.$$

Entnimmt man aus (15) die Werte für $p_2 p^2 S_0$ und $p_3 p^3 S_0$ und setzt sie in die vorhergehende Gleichung ein, so folgt

$$\cos s_1 = \cos s_2 \cos s_3 - \sin s_2 \sin s_3 \cos s^1 \tag{17}$$

oder nach (2)

$$\cos s_1 = \cos s_2 \cos s_3 + \sin s_2 \sin s_3 \cos w_1.$$

In der üblichen Bezeichnung hat man so den *Cosinussatz*

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,} \tag{II a}$$

sowie zwei weitere durch zyklische Vertauschung hieraus hervorgehende Gleichungen. Hätte man die zweite Formel (I) mit $i = 3$, $k = 2$ genommen, so hätte man entsprechend zu (17) erhalten

$$\cos s^1 = \cos s^2 \cos s^3 - \sin s^2 \sin s^3 \cos s_1$$

oder nach (2)

$$\cos w_1 = -\cos w_2 \cos w_3 + \sin w_2 \sin w_3 \cos s_1$$

oder in der üblichen Bezeichnung

$$\boxed{\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a} \tag{II b}$$

und noch zwei andere Gleichungen. Dies ist *der polare Cosinussatz.*

3. Sinus-Cosinussatz

Benutzt man die Formeln (II) mit $i \neq k$, so erhält man die 6 Formeln, welche den Sinus-Cosinussatz darstellen. Setzt man z. B. $i = 3$, $k = 1$ also

$$a^{13} a_{11} + a^{23} a_{21} + a^{33} a_{31} = 0,$$

so folgt nach (7)

$$p^1 p^3 \cos s^2 \cdot p^1 p^1 + p^2 p^3 \cos s^1 \cdot p_2 p_1 \cos s_2 + p^3 p^3 \cdot p_3 p_1 \cos s_2 = 0$$

oder

$$p_1 p^1 \cos s^2 + p_2 p^2 \cos s^1 \cos s_2 + p_3 p^3 \cos s_2 = 0.$$

Ersetzt man hier nach (15) $p_i p^i$ entweder durch $\sin s_i$ oder $\sin s^i$, so erhält man

$$\sin s_1 \cos s^2 + \sin s_2 \cos s^1 \cos s_3 + \sin s_3 \cos s_2 = 0 ,$$

oder

$$\sin s^1 \cos s^2 + \sin s^2 \cos s^1 \cos s_3 + \sin s^3 \cos s_2 = 0 ,$$

oder nach (2)

$$-\sin s_1 \cos w_2 - \sin s_2 \cos s_3 \cos w_1 + \sin s_3 \cos s_2 = 0 ,$$

$$-\sin w_1 \cos w_2 - \sin w_2 \cos w_1 \cos w_3 + \sin w_3 \cos s_2 = 0 ,$$

oder in der üblichen Bezeichnung

$$\boxed{\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos a ,} \qquad \text{(IIIa)}$$

$$\boxed{\sin \gamma \cos b = \cos \beta \sin a + \sin \beta \cos a \cos c} \qquad \text{(IIIb)}$$

und noch 5 Paare entsprechender Formeln.

Möbiussche Dreiecke

Die Ableitung der Formeln bezog sich nur auf *Euler*sche Dreiecke; man kann aber nachträglich sehr leicht zeigen, daß alle Grundformeln auch für die sogenannten *Möbius*schen Dreiecke gelten. Zu diesem Zwecke gehe man von dem *Euler*schen Dreieck ABC aus, lege in jeden seiner Winkel einen um die Winkelspitze beschriebenen Kreisbogen und versehe jeden solchen Kreisbogen mit einer Pfeilspitze, so daß alle Pfeile für einen auf der Außenseite der Kugeloberfläche stehenden Beobachter Uhrzeigersinn anzeigen oder alle den entgegengesetzten Drehsinn. Wir nehmen zunächst das erstere an und verstehen von jetzt ab genauer für alle folgenden Dreiecke unter

α den Winkel, um den AC im Uhrzeigersinn zu drehen ist, bis AC auf AB fällt,

β den Winkel, um den BA im Uhrzeigersinn zu drehen ist, bis BA auf BC fällt,

γ den Winkel, um den CB im Uhrzeigersinn zu drehen ist, bis CB auf CA fällt.

Nun gehe man auf der Kugel statt auf dem kürzesten Weg von B nach C auf dem längsten Weg, und man erkennt dann, daß das neue, *Möbius*sche Dreieck statt den Stücken

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ 2\pi - a & b & c & \alpha & \pi + \beta & \pi + \gamma \end{array} \qquad (18)$$

als Seiten und Winkel besitzt. Bei dieser Substitution bleiben aber alle Grundformeln ungeändert, sie gelten daher auch für das *Möbius*sche Dreieck. Verfährt man mit b und c gerade so wie mit a, dann erhält man

so drei Dreiecke. Nun verbinde man B mit C und zugleich A und C auf dem längsten Weg; jetzt erfahren die Stücke die Substitution

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ 2\pi - a & 2\pi - b & c & \pi + \alpha & \pi + \beta & \gamma \end{array} \tag{19}$$

und wieder bleiben die Grundformeln erfüllt; so ergeben sich drei neue Dreiecke. Endlich kann man alle drei Punkte auf dem längsten Weg verbinden, und die Formeln gelten auch für das neue Dreieck. Zusammen mit dem ursprünglichen Dreieck hat man so 8 *Möbius*sche Dreiecke.

Nun bleiben die Grundformeln auch vermöge der Substitution

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c & 2\pi - \alpha & 2\pi - \beta & 2\pi - \gamma \end{array} \tag{20}$$

ungeändert; man erhält also zu jedem der 8 Dreiecke noch ein anderes, also im ganzen 16 *Möbius*sche Dreiecke; für alle gelten die Grundformeln. Die 8 letzten Dreiecke gehen aber aus den 8 ersten dadurch hervor, daß man oben bei der Winkeldefinition statt des Uhrzeigersinnes stets den entgegengesetzten fordert.

Bemerkung. Man kann die *reziproken Vektoren* $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}^3$ *explizit durch die Vektoren* $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ *darstellen.* Bei der Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie war dies nicht notwendig. Der Definition nach ist $\mathfrak{p}^1 = C \cdot (\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_3)$, wo C eine Konstante ist. Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{p}_1$, so folgt nach (1)

$$C = \frac{1}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)}.$$

Man hat also

$$\mathfrak{p}^1 = \frac{\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_3}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)}, \qquad \mathfrak{p}^2 = \frac{\mathfrak{p}_3 \times \mathfrak{p}_1}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)}, \qquad \mathfrak{p}^3 = \frac{\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_2}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)}. \tag{21}$$

Es ist eine nützliche Übung, durch Rechnung nachzuweisen, daß die reziproken von $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}^3$ wieder $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ sind. Aus (21) folgt

$$\mathfrak{p}^1 \times \mathfrak{p}^2 = \frac{\{\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_3\} \times \{\mathfrak{p}_3 \times \mathfrak{p}_1\}}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)^2} = \frac{\mathfrak{p}_3\, (\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3) - \mathfrak{p}_1\, (\mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3\, \mathfrak{p}_3)}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)^2},$$

$$\mathfrak{p}^1 \times \mathfrak{p}^2 = \frac{\mathfrak{p}_3}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)}. \tag{22}$$

Hieraus folgt nach skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{p}^3$ nach (1)

$$(\mathfrak{p}^1\, \mathfrak{p}^2\, \mathfrak{p}^3) = \frac{1}{(\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_3)}. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) erhält man die dritte der folgenden Formeln

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{\mathfrak{p}^2 \times \mathfrak{p}^3}{(\mathfrak{p}^1\, \mathfrak{p}^2\, \mathfrak{p}^3)}, \qquad \mathfrak{p}_2 = \frac{\mathfrak{p}^3 \times \mathfrak{p}^1}{(\mathfrak{p}^1\, \mathfrak{p}^2\, \mathfrak{p}^3)}, \qquad \mathfrak{p}_3 = \frac{\mathfrak{p}^1 \times \mathfrak{p}^2}{(\mathfrak{p}^1\, \mathfrak{p}^2\, \mathfrak{p}^3)} \tag{24}$$

und durch zyklische Vertauschung die andern. Der Vergleich von (24) mit (21) zeigt nun, daß $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ reziprok zu $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}^3$ sind.

§ 37. Elementare Begründung der sphärischen Trigonometrie für Eulersche und Möbiussche Dreiecke

Im folgenden soll eine elementare, einwandfreie, d. h. für alle Fälle gültige Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie wiedergegeben werden, wie ich sie in meinem Büchlein „Der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik", 1922, S. 24ff., dargestellt habe. Ich habe dort auf den Umstand hingewiesen, daß alle die elementaren, in der Schule üblichen Ableitungen in speziellen Fällen, die nicht leicht (jedenfalls nicht von dem Schüler) übersehen werden können, versagen. So anschaulich und hübsch die betreffenden Figuren die Formeln abzulesen gestatten, so möchte ich sie doch nur zur nachträglichen Verifikation verwendet sehen. *Ein so fundamentales Formelsystem wie das der sphärischen Trigonometrie muß auf ganz fester Grundlage errichtet werden.* An jener Stelle habe ich noch darauf hingewiesen, daß auch in der Schule der *Möbius*sche Dreiecksbegriff notwendig ist. Denn bei der Erledigung von Problemen der sphärischen Astronomie kommen solche Dreiecke in Frage; man braucht nur in dem Dreieck Zenit—Pol—Stern den Stundenwinkel > 180 zu nehmen. Den *Study*schen Dreiecksbegriff im elementaren Unterricht einzuführen, liegt kein Grund vor.

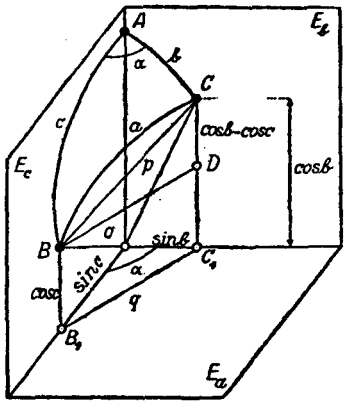

Fig. 96

A, B, C seien drei beliebige Punkte einer Kugel mit dem Radius $r = 1$ um O als Mittelpunkt (Fig. 96). Keiner der Punkte sei Gegenpunkt eines andern, und alle drei sollen nicht auf einem und demselben Großkreise liegen. Wie in § 36 verbinden wir nun je zwei der Punkte auf dem kürzesten Wege durch Großkreisbögen und erhalten so das *Euler*sche sphärische Dreieck A, B, C mit Seiten a, b, c, die alle $< \pi$ sind. Unter den Winkeln verstehen wir die Winkel von je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Großkreisen, die $< \pi$ sind, also die Winkel im üblichen Sinne.

Durch den Kugelmittelpunkt O lege man die Ebene E_a senkrecht zu OA, welche die Ebene OAB (E_c) in OB_1 und die Ebene OAC (E_b) in OC_1 schneiden möge. Man kann nun alle *Euler*schen Dreiecke wie folgt übersehen: Erstens kann man den Winkel $\alpha = \sphericalangle B_1OC_1$ vergrößern oder verkleinern, aber so, daß α immer kleiner als π ist. Zweitens kann man den Strahl OB in der Ebene E_c und den Strahl OC in der Ebene E_b um O sich drehen lassen, aber so, daß immer $b < \pi$ und $c < \pi$ bleibt. B werde auf OB_1 nach B_1 und C auf OC_1 nach C_1 projiziert. Man hat dann die für alle Fälle gültigen Beziehungen:

$$OB_1 = \sin c\,, \qquad OC_1 = \sin b\,; \qquad B_1B = \cos c\,, \qquad C_1C = \cos b\,,$$

wenn man noch übereinkommt, daß B_1B und C_1C positiv sein sollen, falls die Strecken, in der angeschriebenen Punktfolge durchlaufen, dieselbe Richtung haben wie OA; andernfalls sollen die Strecken negativ gerechnet werden. OA gilt sozusagen als z-Achse. Wir setzen $B_1C_1 = q$ und die Strecke $BC = p$. Aus dem Dreieck OB_1C_1 ergibt sich mit Hilfe des Cosinussatzes der ebenen Trigonometrie

$$q^2 = \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \sin b \sin c \cos \alpha\,. \tag{1}$$

Zieht man durch B die Parallele zu B_1C_1 und schneidet diese mit C_1C in D, so ist nach Größe und Vorzeichen stets $C_1D = B_1B = \cos c$, und ebenso

$$DC = \cos b - \cos c\,,$$

wobei DC positiv oder negativ ist, je nachdem der Durchlaufungssinn DC mit dem von OA übereinstimmt oder nicht. Aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC, in dem $BD = B_1C_1 = q$ ist, folgt

$$p^2 = q^2 + (\cos b - \cos c)^2. \tag{2}$$

Endlich erhält man für die Basis p des gleichschenkligen Dreiecks BOC, dessen Winkel an der Spitze O gleich α ist, und dessen Schenkel gleich 1 sind, wiederum mit Hilfe des Cosinussatzes der ebenen Trigonometrie

$$p^2 = 2 - 2 \cos \alpha\,. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) führe man die Werte von p^2 und q^2 in (2) ein und bekommt so

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cos \alpha = {} & \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \sin b \sin c \cos \alpha \\ & + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos b \cos c \end{aligned}$$

oder

$$\cos \alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha\,.$$

Vertauscht man noch die Buchstaben zyklisch, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha\,, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta\,, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma\,. \end{aligned}\right\} \text{ Cosinussatz} \tag{I}$$

Durch dreimalige Anwendung des Cosinussatzes der ebenen Trigonometrie wurde so der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie erhalten. Aus diesen Formeln, die für alle *Eulers*chen Dreiecke gelten, werden nun, ohne die Anschauung weiterhin (auch das Polardreieck nicht!) zu benutzen, alle andern Formeln rein analytisch abgeleitet. Mir erscheint das auch für den elementaren Unterricht wichtig, damit der Schüler erkennt, daß als Grundformel der sphärischen Trigonometrie der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie betrachtet werden kann. Zu-

dem ist dies eine sehr gute Übung. In letzter Linie ist es also der Cosinussatz der *ebenen* Geometrie, der alles beherrscht. Er kann als die Grundformel der *Euklid*ischen Metrik und als die Quelle der ganzen *Euklid*ischen Geometrie angesehen werden.

Aus (I) folgt

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

oder, da

$$\sin^2 b \sin^2 c = (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c)$$

ist,

$$\sin^2\alpha \sin^2 b \sin^2 c = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c. \quad (4)$$

Da die rechte Seite eine symmetrische Funktion[1]) der Seiten a, b, c ist, so hat man

$$\sin^2\alpha \sin^2 b \sin^2 c = \sin^2\beta \sin^2 c \sin^2 a = \sin^2\gamma \sin^2 a \sin^2 b,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin\beta &= \sin b \sin\alpha, \\ \sin b \sin\gamma &= \sin c \sin\beta, \\ \sin c \sin\alpha &= \sin a \sin\gamma. \end{aligned}\right\} \text{ Sinussatz} \qquad (II)$$

Die Wurzeln mußten positiv ausgezogen werden, da alle Winkel und Seiten $< \pi$ sind.

Eliminiert man weiter aus den beiden ersten Gleichungen (I) $\cos a$ dadurch, daß man die mit $\cos c$ multiplizierte erste Gleichung zur zweiten addiert, so folgt:

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos\alpha + \sin c \sin a \cos\beta,$$

$$\cos b \sin^2 c = \sin b \sin c \cos c \cos\alpha + \sin c \sin a \cos\beta.$$

Dividiert man mit $\sin c \neq 0$, so folgt, wenn noch b mit c und β mit γ vertauscht und dann überdies alle Buchstaben zyklisch vertauscht werden,

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos\beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha, \\ \sin a \cos\gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha; \\ \sin b \cos\gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta, \\ \sin b \cos\alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta; \\ \sin c \cos\alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos\gamma, \\ \sin c \cos\beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos\gamma. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Sinus-}\\ \text{Cosinus-Satz}\end{array} \qquad (III)$$

[1]) Diese Funktion ist uns schon in § 35 und 36 begegnet und hat zum *Eckensinus* S geführt. Es ist $\sin a \sin b \sin c = S$.

Polarformeln

Aus (I) folgen die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},\quad \cos\beta = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},\quad \cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

und hieraus

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b \sin c} + \frac{(\cos b - \cos c\cos a)(\cos c - \cos a\cos b)}{\sin^2 a \sin b \sin c}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 a)(\cos a - \cos b\cos c) + (\cos b - \cos c\cos a)(\cos c - \cos a\cos b)}{\sin^2 a \sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos b\cos c - \cos^3 a + \cos^2 a\cos b\cos c + \cos b\cos c - \cos a\cos^2 b}{\sin^2 a \sin b \sin c}$$

$$- \frac{\cos a\cos^2 c - \cos^2 a\cos b\cos c}{\sin^2 a \sin b \sin c};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \cos a \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a \sin b \sin c},$$

oder nach (4) und (II)

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \cos a \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}{\sin^2 a \sin b \sin c} = \cos a \sin^2\alpha \frac{\sin b}{\sin a}\cdot\frac{\sin c}{\sin a}$$

$$= \cos a \sin^2\alpha \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \cos a \sin\beta \sin\gamma.$$

Also hat man

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,\\ \cos\beta &= -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b,\\ \cos\gamma &= -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c. \end{aligned}\right\}\ \textbf{Polarer Cosinussatz}\quad (\text{I a})$$

Verfährt man mit (Ia) wie oben bei der Ableitung des Sinussatzes, so erhält man wieder den Sinussatz, der also zu sich selbst polar ist. Durch Elimination von $\cos\alpha$ aus der ersten und zweiten Gleichung (Ia) findet man wie oben

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha\cos b &= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos a,\\ \sin\alpha\cos c &= \cos\gamma\sin\beta + \sin\gamma\cos\beta\cos a, \end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}\textbf{Polarer Sinus-}\\ \textbf{Cosinus-Satz}\end{matrix}\quad (\text{III a})$$

und vier weitere Formeln, die sich aus diesen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben ergeben.

Nun erst wird man geometrisch das Polardreieck einführen und zeigen, wie mit seiner Hilfe aus den Systemen (I)—(III) die Systeme (Ia) und (IIIa) entstehen. Vom Polardreieck aus versteht nun auch der Schüler, wie man auf die Umformungen verfallen konnte, die von den ersten Formelsystemen zu den zweiten führten.

Nachträglich erkennt man jetzt, daß alle Formeln auch gelten, wenn die drei Ecken A, B, C auf ein und demselben Großkreis liegen, wenn also z. B. $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ ist; man hat so zugleich ein Mittel, um die Formeln dem Gedächtnis einzuprägen.

Daß die Grundformeln auch für *Möbius*sche Dreiecke gelten, wurde am Ende des letzten Paragraphen gezeigt.

§ 38. Kürzester Abstand von zwei windschiefen Geraden

Es seien zwei windschiefe Gerade gegeben, es soll ihr kürzester Abstand ermittelt werden. Die erste Gerade gehe durch den Punkt P_1, der durch den Vektor $\overrightarrow{OP_1} = \mathfrak{r}_1$ gegeben sei, und ihre Richtung sei durch den Einheitsvektor $\mathfrak{a}_1$ definiert. Entsprechend sei die zweite Gerade durch den Punkt P_2 oder den Vektor $\mathfrak{r}_2$ und durch ihre Richtung, d. h. den Einheitsvektor $\mathfrak{a}_2$ gegeben. Gesucht sei ihr kürzester Abstand $D = Q_2 Q_1$ und die Fußpunkte Q_1 und Q_2 von D. Wird $P_1 Q_1 = \varrho_1$, $P_2 Q_2 = \varrho_2$ gesetzt, und wird der Vektor $\overrightarrow{OQ_1}$ mit $\mathfrak{R}_1$, der Vektor $\overrightarrow{OQ_2}$ mit $\mathfrak{R}_2$ bezeichnet, so ist

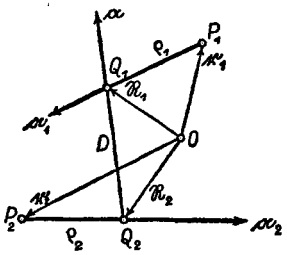

Fig. 97

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \mathfrak{r}_1 + \varrho_1 \mathfrak{a}_1 , \\ \mathfrak{R}_2 &= \mathfrak{r}_2 + \varrho_2 \mathfrak{a}_2 . \end{aligned} \tag{1}$$

In die Strecke D lege man einen Einheitsvektor $\mathfrak{a}$, so daß $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}$ in dieser Folge durch eine Rechtsschraube einander zugeordnet sind, so hat man

$$\mathfrak{a} \sin \vartheta = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 , \tag{2}$$

wo ϑ der Winkel der Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ist; denn $\mathfrak{a}$ hat die vorgeschriebene Richtung, und die Beträge der Vektoren auf beiden Seiten von (2) sind $\sin \vartheta$. Man hat nun

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 + D\mathfrak{a} . \tag{3}$$

Setzt man hier aus (1) die Werte für $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ein, so folgt:

$$D\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 + \varrho_1 \mathfrak{a}_1 - \varrho_2 \mathfrak{a}_2 . \tag{4}$$

Multipliziert man links und rechts skalar mit $\mathfrak{a}$ und bedenkt, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2 = 0$ ist, so folgt

$$D = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\, \mathfrak{a} ,$$

oder nach (2)

$$D \sin \vartheta = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\, (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) ,$$

also

$$D \sin \vartheta = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix} . \tag{5}$$

Dabei sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von P_1, x_2, y_2, z_2 die von P_2 und $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sind die Richtungswinkel der beiden gegebenen Geraden. Zur Berechnung von ϱ_1 und ϱ_2 multipliziere man (4) skalar mit $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{a}_2$, und erhält

$$\begin{aligned} (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\, \mathfrak{a}_1 + \varrho_1 - \varrho_2 \cos \vartheta &= 0 , \\ (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\, \mathfrak{a}_2 + \varrho_1 \cos \vartheta - \varrho_2 &= 0 , \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}\varrho_1 \sin^2\vartheta &= (r_1 - r_2)\,(a_2\cos\vartheta - a_1) = \Sigma\,(x_1 - x_2)\,(\cos\alpha_2\cos\vartheta - \cos\alpha_1),\\ \varrho_2 \sin^2\vartheta &= (r_1 - r_2)\,(a_2 - a_1\cos\vartheta) = \Sigma\,(x_1 - x_2)\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\vartheta),\end{aligned} \tag{6}$$

wo in den Summen die Buchstaben x und α zyklisch zu vertauschen sind. Dabei ist nach (2), wenn man das Quadrat des Betrags nimmt,

$$\begin{aligned}\sin^2\vartheta &= \Sigma\,(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1)^2,\\ \cos\vartheta &= \Sigma\cos\alpha_1\cos\alpha_2\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Aus (5) erhält man D, aus (6) ϱ_1 und ϱ_2 und aus (1) durch Übergang zu den Komponenten die Koordinaten der Fußpunkte Q_1 und Q_2.

§ 39. Verallgemeinerung des Ellipsenzirkels

Eine Gerade bewege sich so, daß drei feste Punkte P_1, P_2, P_3 von ihr in drei beliebigen, sich in einem Punkt schneidenden festen Ebenen bleiben. Der von einem beliebigen festen Punkt P dieser Geraden durchlaufene Ort ist dann ein Ellipsoid.

Die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 schneiden sich in drei Geraden, die durch den gemeinsamen Punkt O gehen. In die Schnittgeraden (Fig. 98) legen wir drei Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und in die bewegliche Gerade den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$. P und P_i seien durch die von O ausgehenden Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_i$ charakterisiert. Man hat dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_1 &= \mathfrak{r} + a\mathfrak{a}\,,\\ \mathfrak{r}_2 &= \mathfrak{r} + b\mathfrak{a}\,,\\ \mathfrak{r}_3 &= \mathfrak{r} + c\mathfrak{a}\,,\end{aligned} \tag{1}$$

wo a, b, c drei konstante Skalare sind. Die Bedingungen dafür, daß P_1, P_2, P_3 bezüglich in den Ebenen E_1, E_2, E_3 bleiben, sind

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3) &= 0\,,\\ \mathfrak{r}_2(\mathfrak{a}_3\times\mathfrak{a}_1) &= 0\,,\\ \mathfrak{r}_3(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2) &= 0;\end{aligned} \tag{2}$$

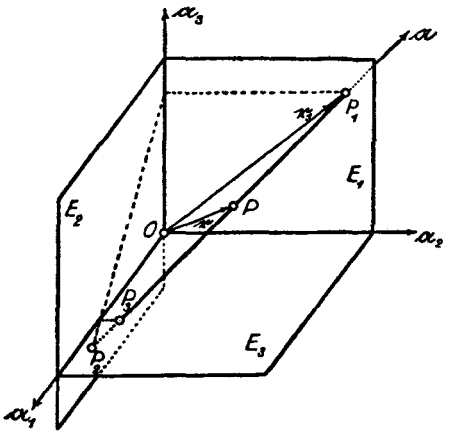

Fig. 98

denn die erste Gleichung z. B. drückt aus, daß $\mathfrak{r}_1$ auf dem Lot der Ebene E_1 senkrecht steht. Nach (1) und (2) hat man also

$$(\mathfrak{r} + a\mathfrak{a})(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3) = 0\,,\quad (\mathfrak{r} + b\mathfrak{a})(\mathfrak{a}_3\times\mathfrak{a}_1) = 0\,,\quad (\mathfrak{r} + c\mathfrak{a})(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2) = 0\,. \tag{3}$$

Die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{a}$ werden in Komponenten nach den Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ zerlegt, so daß man hat

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a}_1 + y\mathfrak{a}_2 + z\mathfrak{a}_3\,,\qquad \mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{a}_1 + \beta\mathfrak{a}_2 + \gamma\mathfrak{a}_3\,. \tag{4}$$

Dabei sind x, y, z die schiefwinkligen Koordinaten von P bezüglich eines xyz-Systems, dessen Achsen mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ zusammenfallen; α, β, γ sind die Koordinaten des sphärischen Bildes der Richtung $\mathfrak{a}$, wo O der Mittelpunkt der Bildkugel ist. Setzt man die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{a}$ aus (4) in (3) ein, so gibt z. B. die erste Gleichung (3)

$$\{(x + a\alpha)\,\mathfrak{a}_1 + (y + b\beta)\,\mathfrak{a}_2 + (z + c\gamma)\,\mathfrak{a}_3\}\,(\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3) = 0\,.$$

Multipliziert man aus und bedenkt, daß $\mathfrak{a}_2\,(\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{a}_3\,(\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3) = 0$ ist, so folgt

$$(x + a\,\mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3) = 0$$

und, da die drei Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ nicht komplanar sind, also $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3) \neq 0$ ist,

$$x + a\alpha = 0\,, \qquad y + b\beta = 0\,, \qquad z + c\gamma = 0\,, \tag{5}$$

wo die zwei andern Gleichungen entsprechend gewonnen werden. Entnimmt man aus (5) die Werte für α, β, γ und setzt sie in die zweite Gleichung (4) ein, so ergibt sich

$$-\mathfrak{a} = \frac{x}{a}\,\mathfrak{a}_1 + \frac{y}{b}\,\mathfrak{a}_2 + \frac{z}{c}\,\mathfrak{a}_3\,,$$

oder

$$1 = \left(\frac{x}{a}\,\mathfrak{a}_1 + \frac{y}{b}\,\mathfrak{a}_2 + \frac{z}{c}\,\mathfrak{a}_3\right)^2. \tag{6}$$

Dies ist die Gleichung einer Mittelpunktsfläche 2. Ordnung, da eine Vertauschung von x, y, z mit $-x, -y, -z$ die Gleichung (6) ungeändert läßt. Statt (6) kann man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab}\,(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2) + \frac{2yz}{bc}\,(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3) + \frac{2zx}{ca}\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1) = 1 \tag{7}$$

schreiben, dabei bedeuten die skalaren Produkte $(\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k)$ die Cosinus der Winkel, die die Achsen miteinander bilden. Da der Natur der Aufgabe nach P nicht ins Unendliche rücken kann, so ist die Fläche ein Ellipsoid. Dies erkennt man aber auch so: die linke Seite von (7), die aus der rechten von (6) entstanden ist, stellt stets das Quadrat des Betrags eines Vektors dar, und zwar für alle Werte von x, y, z, und darum ist die linke Seite von (7) eine positiv definite quadratische Form von x, y, z. Setzt man die linke Seite von (7) gleich Null, so erhält man die Gleichung des Richtkegels; dieser hat außer dem Ursprung keine reellen Punkte, und darum ist die Fläche ein *Ellipsoid*. Wir nehmen nun an, daß die gegebenen Ebenen aufeinander senkrecht stehen, dann gilt statt (7)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{8}$$

Die gegebenen Ebenen sind jetzt die Symmetriebenen des Ellipsoids. Man hat so eine Verallgemeinerung des Ellipsenzirkels. Ist P der Mittelpunkt von zwei Punkten, etwa P_1 und P_2, so ist $a = -b$ und die Fläche ist ein Drehellipsoid. Wenn im besonderen zwei Punkte, etwa P_2 und P_3, zusammenfallen, also $b = c$ ist, so bewegt sich $P_2 = P_3$ in der x-Achse,

während P_1 in der yz-Ebene sich bewegen muß. Auch in diesem Falle hat man ein Drehellipsoid, seine Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1;$$

ist außerdem P die Mitte von P_1P_2 ($P_2=P_3$), so ist $a=-b$, und die Fläche ist eine Kugel, was auch geometrisch klar ist.

§ 40. Linienkoordinaten. Das Nullsystem. Vektorsysteme. Zentralachse eines Vektorsystems

1. Linienkoordinaten. Das Nullsystem

Ist O ein für die folgende Betrachtung fester Punkt, der als Bezugspunkt oder Reduktionspunkt bezeichnet werde, und $\mathfrak{p}$ ein Kraftvektor, der etwa im Punkt A angreife, so versteht man unter dem *Moment* $\mathfrak{m}=\overrightarrow{OC}$ der Kraft $\mathfrak{p}$ in bezug auf O den Vektor

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{r}\times\mathfrak{p}\,, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{r}$ der Vektor $\overrightarrow{OA}$ ist. Das Moment $\mathfrak{m}$ ist also ein Vektor, der auf der Ebene $\mathfrak{r}\mathfrak{p}$ senkrecht steht, den Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ durch eine Rechtsschraube zugeordnet ist, und dessen Betrag gleich dem positiv genommenen Inhalt des Parallelogramms ist, von dem $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ zwei anstoßende Seiten sind. Greift $\mathfrak{p}$ an einem starren Körper an, der mit O fest verbunden ist, so würde $\mathfrak{p}$ den Körper um die Achse $\mathfrak{m}$ zu drehen suchen. Aus der Definition oder auch aus (1) folgt

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{p})=0\,. \tag{2}$$

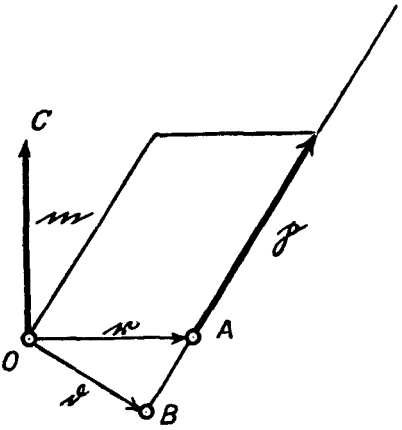

Fig. 99

Weiter ändert sich $\mathfrak{m}$ nicht, wenn $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{r}+\lambda\mathfrak{p}$ ersetzt wird d. h., wenn der Vektor $\mathfrak{p}$ längs der Geraden G, in der er liegt, verschoben wird; $\mathfrak{p}$ darf also ein sogenannter „linienflüchtiger Vektor" sein. Als Beispiel diene wieder ein starrer Körper, an dem $\mathfrak{p}$ angreift.

Durch Angabe der beiden Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ ist umgekehrt die Gerade G bestimmt; denn ist OB das Lot auf G, und bezeichnet man den Vektor $\overrightarrow{OB}$ mit $\mathfrak{b}$, so ist

$$\mathfrak{b}=\frac{\mathfrak{p}\times\mathfrak{m}}{\mathfrak{p}^2}\,; \tag{3}$$

denn $\mathfrak{d}$ hat nach (3) die richtige Richtung, und es ist nach (3)

$$d \cdot p = m ,$$

wenn die Beträge durch lateinische Buchstaben bezeichnet werden; $d \cdot p$ ist aber der Inhalt des obigen Parallelogramms und m auch. Durch $\mathfrak{d}$ ist die Gerade G eindeutig bestimmt; darum heißen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ die (Vektor)-*Koordinaten* der (orientierten) *Geraden* G. Nach (3) bestimmen $\varrho\mathfrak{p}, \varrho\mathfrak{m}$, wo ϱ ein Skalar ist, dieselbe Gerade. Sind p_1, p_2, p_3 und m_1, m_2, m_3 die Komponenten von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ in bezug auf ein *Cartes*isches xyz-System, das in O seinen Ursprung hat, so nennt man $p_1, p_2, p_3; m_1, m_2, m_3$ *die sechs Koordinaten der orientierten Geraden* G. Nur sechs solche Zahlen, die der Gleichung (2) oder der Gleichung

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{p}) = m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 = 0 , \tag{4}$$

die man die *identische Fundamentalrelation* nennt, genügen, können Koordinaten einer Geraden G sein. Die Koordinaten sind sogenannte überzählige Koordinaten. Man nennt sie weiter *homogen*, weil $\varrho p_1, \varrho p_2, \varrho p_3; \varrho m_1, \varrho m_2, \varrho m_3$ dieselbe Gerade bestimmen. Eine Gerade ist also durch vier Konstante bestimmt; man sagt daher auch, daß der Linienraum, d. h. der Raum, als Inbegriff seiner Geraden, vierdimensional sei. Hat $\mathfrak{r}$ in (1) die Komponenten x, y, z, so folgt aus (1)

$$m_1 = y p_3 - z p_2 , \qquad m_2 = z p_1 - x p_3 , \qquad m_3 = x p_2 - y p_1 . \tag{5}$$

Faßt man x, y, z als laufende Koordinaten auf, so stellen diese Gleichungen, von denen wegen (4) eine eine Folge der übrigen ist, die Gerade G analytisch dar: sie sind die Gleichungen der Ebenen, welche G in die Koordinatenebenen projizieren. Die Gerade G kann auch durch $\mathfrak{R} = \mathfrak{d} + \lambda\mathfrak{p}$ oder nach (3) durch

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{p} \times \mathfrak{m}}{p^2} + \lambda\mathfrak{p} \tag{6}$$

dargestellt werden, wo λ ein Parameter und $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Radiusvektor aus O in einem Punkt von G ist. Hat $\mathfrak{R}$ die Komponenten X, Y, Z, so ist

$$X = \frac{p_2 m_3 - p_3 m_2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + \lambda p_1 ; \quad Y = \frac{p_3 m_1 - p_1 m_3}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + \lambda p_2 ; \quad Z = \frac{p_1 m_2 - p_2 m_1}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + \lambda p_3 . \tag{7}$$

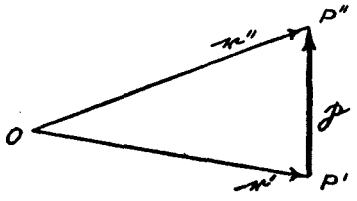

Fig. 100

Durchläuft λ, von Null beginnend, stetig wachsend die positiven Zahlen, so durchläuft der Punkt X, Y, Z von B aus die Halbgerade im Sinne des Pfeils, für negative λ erhält man die andere Halbgerade. Ist $\mathfrak{p}$ durch seinen Anfangspunkt P' und seinen Endpunkt P'' gegeben (Fig. 100), so ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}', \tag{8}$$

und nach (1)

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{r}' \times (\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}') = \mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}'', \tag{9}$$

wenn die Vektoren $\overrightarrow{OP'}$ und $\overrightarrow{OP''}$ mit $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}''$ bezeichnet werden. Man hat jetzt nach (8) und (9)

$$\begin{aligned} &p_1 = x'' - x', \quad p_2 = y'' - y', \quad p_3 = z'' - z'; \\ &m_1 = y'z'' - y''z', \quad m_2 = z'x'' - z''x', \quad m_3 = x'y'' - x''y'. \end{aligned} \tag{10}$$

Diese sechs Größen heißen die *Plücker*schen Linienkoordinaten, sie erfüllen (4) identisch. Diese Koordinaten verwendet man immer dann mit Vorteil, wenn von der Geraden zwei Punkte gegeben sind.

Es sei jetzt noch eine zweite Gerade $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{m}'$ gegeben, dann hat man nach (6)

$$\mathfrak{R}' = \frac{\mathfrak{p}' \times \mathfrak{m}'}{p'^2} + \lambda' \mathfrak{p}'. \tag{11}$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu untersuchen, unter welcher Bedingung die beiden Geraden G und G' sich schneiden und, wenn sie dies tun, die Koordinaten des Schnittpunkts zu finden. Es muß dann in (6) und (11) ein λ und λ' existieren, daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$ wird. Man hat so die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{p} \times \mathfrak{m}}{p^2} + \lambda \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}' \times \mathfrak{m}'}{p'^2} + \lambda' \mathfrak{p}', \tag{12}$$

welche drei lineare Gleichungen für λ, λ' darstellt; dies sieht man sofort, wenn man zu den Komponenten übergeht. Damit diese Gleichungen verträglich sind, muß die Gleichung, die durch Elimination von λ und λ' entsteht, erfüllt sein. Multipliziert man in (12) links und rechts skalar mit $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}'$, so folgt

$$\frac{(\mathfrak{p} \times \mathfrak{m})(\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}')}{p^2} = \frac{(\mathfrak{p}' \times \mathfrak{m}')(\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}')}{p'^2}, \tag{13}$$

oder

$$\frac{p^2(\mathfrak{m}\mathfrak{p}') - (\mathfrak{m}\mathfrak{p})(\mathfrak{p}\mathfrak{p}')}{p^2} = \frac{(\mathfrak{p}'\mathfrak{p})(\mathfrak{m}'\mathfrak{p}') - p'^2(\mathfrak{m}'\mathfrak{p})}{p'^2},$$

oder, da nach (4) $(\mathfrak{m}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{m}'\mathfrak{p}') = 0$ ist,

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{p}') + (\mathfrak{m}'\mathfrak{p}) = 0, \tag{14}$$

oder in Komponenten geschrieben:

$$m_1 p_1' + m_2 p_2' + m_3 p_3' + m_1' p_1 + m_2' p_2 + m_3' p_3 = 0. \tag{14'}$$

Die Bedingung (14) oder (14') ist also notwendig dafür, daß G und G' sich schneiden. Wir zeigen, daß sie auch hinreichend ist. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir in (12) links und rechts skalar mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda p^2 - \lambda' (\mathfrak{p}\mathfrak{p}') &= \frac{(\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{m}')}{p'^2}, \\ \lambda (\mathfrak{p}\mathfrak{p}') - \lambda' p'^2 &= \frac{(\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{m})}{p^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichungen gestatten die Bestimmung von λ und λ', wenn

$$\mathfrak{p}^2\mathfrak{p}'^2 - (\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^2 \neq 0$$

d. h. wenn

$$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}')^2 \neq 0$$

ist, d. h. wenn die Geraden nicht parallel sind. Aus (15) erhält man dann λ oder λ' und dann nach (6) den Radiusvektor $\mathfrak{R}$ des Schnittpunkts. Aber auch, wenn die Geraden parallel sind, der Schnittpunkt also ein uneigentlicher ist, gilt (14) oder (14'). Im Falle des Parallelismus kann man annehmen, daß $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, weil ja $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ und $\varrho\,\mathfrak{m}$, $\varrho\,\mathfrak{p}$ dieselbe Gerade bestimmen; dann lautet die linke Seite von (14)

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{p}) + (\mathfrak{m}'\mathfrak{p}'),$$

und hier ist nach (4) jeder einzelne Posten Null. Man hat also den

Satz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Geraden $\mathfrak{m}, \mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{m}', \mathfrak{p}'$ *sich schneiden, ist*

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{p}') + (\mathfrak{m}'\mathfrak{p}) = m_1 p_1' + m_2 p_2' + m_3 p_3' + m_1' p_1 + m_2' p_2 + m_3' p_3 = 0. \quad (16)$$

Viel schneller hätten wir die Bedingung (16) aus § 38 erhalten können. Da steht vor der Gleichung (5)

$$D \sin\vartheta = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\,(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2),$$

wo D der kürzeste Abstand der beiden Geraden ist. Schreibt man statt $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{a}_2$ die Buchstaben $\mathfrak{r}, \mathfrak{p}, \mathfrak{r}', \mathfrak{p}'$, im Einklang mit der Bezeichnung in diesem Paragraphen, so folgt

$$D \sin\vartheta = (\mathfrak{r}\mathfrak{p}\mathfrak{p}') + (\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'\mathfrak{p}) = (\mathfrak{r} \times \mathfrak{p})\,\mathfrak{p}' + (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{p}')\,\mathfrak{p}$$

oder nach (1)

$$D \sin\vartheta = (\mathfrak{m}\mathfrak{p}' + \mathfrak{m}'\mathfrak{p}).$$

Im Falle des Schneidens ist $D = 0$, und man erhält (16).

Die Linienkoordinaten sind zur Erforschung der *Liniengeometrie,* die man dem Genie *Plückers*[1]) verdankt, von fundamentaler Bedeutung. Der fruchtbare Gedanke *Plückers* war der, neben dem Punkt und der Ebene im Raum, die Gerade als gleichberechtigtes drittes Grundgebilde einzuführen. Wie eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes aus der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit aller Raumpunkte eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, d. h. eine Fläche heraushebt, so bestimmt eine homogene Gleichung

$$f(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3) = 0 \quad (17)$$

zwischen den 6 Linienkoordinaten eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geraden, welche man einen *Linien-* oder *Strahlenkomplex* nennt. Als Beispiel eines Komplexes kann die Gesamtheit aller Geraden dienen, die eine Raumkurve einmal schneiden, oder eine Fläche einmal berühren.

[1]) Vgl. *J. Plücker* „System der Geometrie des Raumes" 1846, S. 322 und „Neue Geometrie des Raumes" 1868—69.

Wie man eine Raumkurve auffassen kann als Gesamtheit ihrer Punkte oder der Ebenen, die sie berühren, so kann man sie auch auffassen als Gesamtheit der Geraden, die sie treffen. Entsprechend bei einer Fläche. Nimmt man gleichzeitig zwei Beziehungen von der Form (17) an, etwa

$$f_1(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3) = 0; \quad f_2(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3) = 0 \tag{18}$$

so sind dadurch ∞^2 Geraden definiert, ein Gebilde, das als *Strahlenkongruenz* oder *Strahlensystem* bezeichnet wird. Alle Geraden, die eine Raumkurve zweimal treffen oder zwei Flächen berühren, oder alle Normalen einer Fläche bilden eine Kongruenz. Diese Strahlensysteme sind für die geometrische Optik von besonderer Wichtigkeit.

Kehren wir zu den Komplexen zurück, so ist der einfachste der *lineare Strahlenkomplex*, d. h. der, wo f in (17) eine homogene lineare Funktion der sechs Linienkoordinaten von der Form

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 b_3 + b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 = 0 \tag{19}$$

ist. Es kann sein, daß

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \tag{20}$$

ist, dann können nach (4) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ als die sechs Koordinaten $m_1', m_2', m_3', p_1', p_2', p_3'$ einer Geraden G' aufgefaßt werden und die Gleichung (19) wird mit (16) identisch. Alle Geraden des linearen Komplexes (19) treffen dann die Gerade G'. Der ganze Komplex besteht aus den Treffgeraden von G'. Dieser Komplex heißt ein *spezieller*. Man kann auch sagen: die Gleichung (19) ist die Gleichung von G' in Linienkoordinaten. Wir setzen jetzt voraus, daß

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \neq 0 \tag{21}$$

ist, dann definiert (19) den *allgemeinen* linearen Strahlenkomplex. Es scheint zunächst schwierig, ja fast unmöglich, die durch (19) definierte Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geraden anschaulich zu erfassen. Wir werden aber sehr bald erkennen, daß die Struktur dieses Komplexes relativ einfach ist.

Setzen wir aus (10) die Werte der Koordinaten in (19) ein, so folgt

$$\begin{aligned} a_1(x''-x') + a_2(y''-y') + a_3(z''-z') + b_1(y'z''-y''z') \\ + b_2(z'x''-z''x') + b_3(x'y''-x''y') = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Will man nun alle Geraden des Komplexes haben, die durch den festen Punkt $P'(x', y', z')$ gehen, so hat man x'', y'', z'' als veränderliche (laufende) Koordinaten anzusehen; dann stellt aber (22) eine durch P' gehende Ebene dar. Alle Strahlen durch P' in dieser Ebene gehören dem Komplex an. Jedem Punkt ist also eine durch ihn gehende Ebene zugewiesen. Man nennt den Punkt *Nullpunkt* und seine ihm entsprechende und durch ihn gehende Ebene seine *Nullebene;* die Strahlen des Komplexes, die durch den Nullpunkt gehen und in der Nullebene liegen, *Nullinien*. Wir wollen jetzt zeigen, daß auch jeder Ebene ein in ihr liegender

Punkt zugewiesen ist, d. h. daß eine reziproke eindeutige Abbildung des Raumes vorliegt. Zu diesem Zwecke schreiben wir (22) in der Form

$$x''(a_1+b_2z'-b_3y')+y''(a_2-b_1z'+b_3x')+z''(a_3+b_1y'-b_2x') \\ +(-a_1x'-a_2y'-a_3z')=0,$$

oder in homogenen Koordinaten geschrieben

$$x''(-b_3y'+b_2z'+a_1t')+y''(b_3x'-b_1z'+a_2t') \\ +z''(-b_2x'+b_1y'+a_3t')+t''(-a_1x'-a_2y'-a_3z')=0. \tag{23}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung

$$x''u+y''v+z''w+t''\vartheta=0, \tag{24}$$

welche die Ebene u, v, w, ϑ in laufenden Punktkoordinaten x'', y'', z'', t'' darstellt, so folgt

$$\begin{aligned} -b_3y'+b_2z'+a_1t' &= u, \\ b_3x' \quad -b_1z'+a_2t' &= v, \\ -b_2x'+b_1y' \quad +a_3t' &= w, \\ -a_1x'-a_2y'-a_3z' \quad &= \vartheta. \end{aligned} \tag{25}$$

Ist nun eine beliebige Ebene gegeben, sind also u, v, w, ϑ vier beliebige Zahlen, die nur nicht alle Null sein dürfen, so hat man, um den entsprechenden Punkt x', y', z', t' zu finden, das System (25) nach x', y', z', t' aufzulösen. Die Determinante des Systems (25) ist eine sogenannte schiefsymmetrische und hat den Wert

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

und ist daher nach (21) von Null verschieden. Das System (25) ist daher eindeutig nach x', y', z', t' auflösbar, und man hat daher den

Satz. Der lineare Strahlenkomplex ordnet jedem Punkt (Nullpunkt) eine durch ihn gehende Ebene (Nullebene) und umgekehrt jeder Ebene (Nullebene) einen in ihr liegenden Punkt (Nullpunkt) zu. Alle Komplexstrahlen durch einen Punkt liegen in seiner Nullebene und alle Komplexstrahlen in einer Ebene gehen durch ihren Nullpunkt.

Sei nun E (Fig. 101) ein Punkt, ε seine durch ihn gehende Nullebene, F ein Punkt von ε, so geht die Nullebene φ von F durch E, da sie den Komplexstrahl EF enthalten muß. Man hat also den

Satz. Liegen zwei Elemente F und ε vereinigt, so liegen die entsprechenden Elemente φ und E auch vereinigt.

Sei nun wieder E (Fig. 102) ein Punkt, ε seine Nullebene, F sei ein weiterer Punkt, der *nicht* in ε liege, dann geht seine Nullebene φ nach dem letzten Satz auch nicht durch E. Der Verbindungslinie $G=EF$ der beiden Nullpunkte weisen wir dann die Schnittlinie G' der entsprechenden Nullebenen ε und φ als entsprechend zu. Ist A ein Punkt von

G', so sind EA und FA Komplexstrahlen, die Nullebene α von A ist also die Ebene AEF: sie geht durch G. Entsprechend ist die Nullebene β von B auf G die Ebene BEF: der Verbindungslinie G' von A und B ist jetzt auch umgekehrt die Schnittlinie G ihrer Nullebenen α und β zugewiesen. G und G' heißen reziproke Polaren. Einem Nullpunkt auf G entspricht jetzt die Ebene durch diesen Punkt und G'. Man hat also den

Satz. Wandert ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Nullebene um die reziproke Polare.

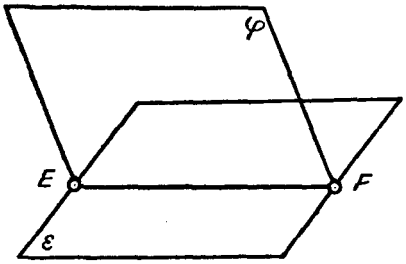

Fig. 101

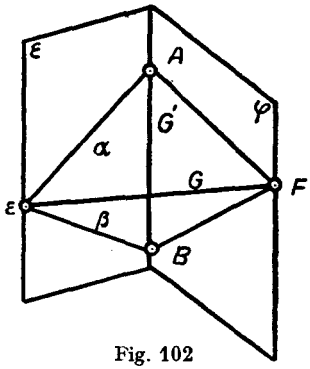

Fig. 102

In Fig. 101 entspricht der Verbindungslinie EF die Schnittlinie $\varepsilon\varphi$ also wieder EF. Die Komplexstrahlen fallen also mit ihren reziproken Polaren zusammen.

Die Gesamtheit aller Nullpunkte, Nullebenen und Nullinien (Komplexstrahlen) bezeichnet man als *Nullsystem*. Wir verlassen für den Augenblick das Nullsystem und wenden uns zur Betrachtung der sogenannten Vektorsysteme, die uns dann zum Nullsystem zurückführen werden.

2. Vektorsysteme

Wir denken uns ein System von n-Vektoren $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$; $\mathfrak{p}_i$ greife am Punkt A_i an und OA_i sei $\mathfrak{r}_i$. Jeder Vektor $\mathfrak{p}_i$ erzeugt dann für O als Reduktionspunkt ein Moment

$$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{p}_i. \tag{26}$$

Wir bilden nun die zwei Vektoren

$$\mathfrak{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{p}_i. \tag{27}$$

$\mathfrak{P}$ heißt *der resultierende Vektor*, $\mathfrak{M}$ *das resultierende Moment* für O; $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ heißen die *Vektorkoordinaten* des Systems in bezug auf den Reduktionspunkt O.

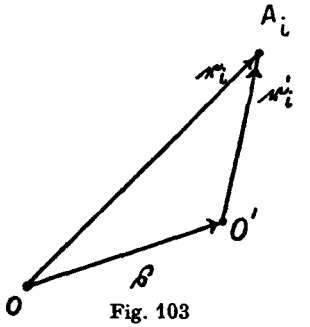

Fig. 103

Ist O' ein neuer Reduktionspunkt, der gegenüber O durch den Vektor $\overrightarrow{OO'} = \mathfrak{s}$ festgelegt sei, und ist $\overrightarrow{O'A_i} = \mathfrak{r}_i'$, so ist

$$\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_i - \mathfrak{s}. \tag{28}$$

Heißen $\mathfrak{P}', \mathfrak{M}'$ die Vektorkoordinaten für O' als Bezugspunkt, so ist

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{M}' = \Sigma\, \mathfrak{r}_i' \times \mathfrak{p}_i$$

oder nach (28) und (27)

$$\boxed{\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}).} \tag{I}$$

Hieraus folgt

$$\boxed{\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{M}' = \mathfrak{P}\mathfrak{M}.} \tag{II}$$

Wegen (II) heißen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ die *Invarianten* des Vektorsystems. Ist speziell $\mathfrak{s} = a\mathfrak{P}$, wo a ein Skalar ist, so folgt aus (I) $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$. Alle Punkte des durch den Reduktionspunkt gehenden Vektors $\mathfrak{P}$ haben dieselben Vektorkoordinaten.

Deutet man die $\mathfrak{p}_i$ als Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, so ist $\mathfrak{P}$ der resultierende Kraftvektor, $\mathfrak{M}$ das resultierende Kraftmoment für O; $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ nennt man eine *Dyname*. Es ist bekannt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kräfte an dem starren Körper sich das Gleichgewicht halten, $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} = 0$ ist, was im ganzen sechs Gleichungen darstellt. Nach (I) ist dann auch für O' $\mathfrak{P}' = \mathfrak{M}' = 0$.

Nun kann man aber $\mathfrak{P}$ auch als Vektor einer Rotationsgeschwindigkeit, $\mathfrak{M}$ als Vektor einer Translationsgeschwindigkeit auffassen, der das starre System unterworfen ist, wobei die Richtung von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ in O die Richtung der Drehachse bzw. Translation, der Betrag $P = |\mathfrak{P}|$ bzw. $M = |\mathfrak{M}|$ die Winkelgeschwindigkeit bzw. Translationsgeschwindigkeit angibt. Es ist nämlich leicht zu zeigen, daß beim Übergang zu einem andern Bezugspunkt $O'(\mathfrak{s})$ die Transformationsformeln (I) gelten. Nach der *Euler*schen Formel (7) des § 34 hat nämlich der Punkt Q des starren Körpers, der durch den Vektor $\overrightarrow{OQ} = \mathfrak{r}$ gegen O festgelegt ist, eine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, die durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{r} + \mathfrak{M} \tag{29}$$

gegeben ist. Geht man vermöge (28)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{s} \tag{30}$$

zu dem neuen Bezugspunkt $O'(\mathfrak{s})$ über, so folgt aus (29) und (30)

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{r}' + \{\mathfrak{M} + (\mathfrak{P} \times \mathfrak{s})\}. \tag{31}$$

Durch Vergleich von (29) und (31) erhält man für O'

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}), \tag{32}$$

also dasselbe Transformationsgesetz (II). Der starre Körper erhält also denselben Geschwindigkeitszustand, wenn er um den durch O' gehenden

Drehvektor $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$ mit der Winkelgeschwindigkeit P gedreht wird und zugleich eine Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{M}'$ erleidet, die aus (32) sich ergibt.

Durch die Gleichheit des Transformationsgesetzes wird der bekannte Dualismus zwischen Kräften und Drehgeschwindigkeiten einerseits, Momenten und Translationsgeschwindigkeiten andererseits am prägnantesten zum Ausdruck gebracht.

Wir errichten nun in jedem Punkt $O'(\mathfrak{s})$ des Raumes die Ebene ω' senkrecht zum resultierenden Moment $\mathfrak{M}'$, so ist dadurch jedem Punkt O' eine Ebene ω' zugewiesen. Es ist leicht zu zeigen, daß die entstehende Reziprozität ein Nullsystem ist. Ist nämlich P ein Punkt von ω', $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}$, dann ist $\overrightarrow{O'P} = \mathfrak{r} - \mathfrak{s}$ und

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{s})\,\mathfrak{M}' = 0 \qquad (33)$$

drückt aus, daß P in ω' liegt. Nach (I) folgt

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{s})\,\mathfrak{M} - (\mathfrak{r} \times \mathfrak{s})\,\mathfrak{P} = 0\,. \qquad (34)$$

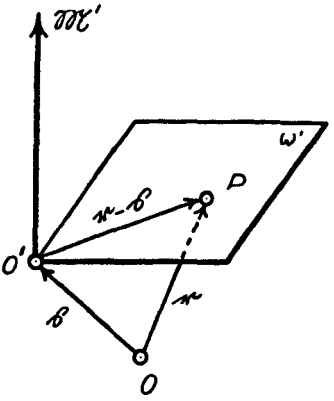

Fig. 104

Es seien nun die Komponenten von $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{M}, \mathfrak{P}$ der Reihe nach

$$x, y, z; \quad x', y', z', \quad M_1, M_2, M_3, \quad P_1, P_2, P_3,$$

so ergibt sich nach (34)

$$(x - x')\,M_1 + (y - y')\,M_2 + (z - z')\,M_3 + (y'z - yz')\,P_1 + (z'x - zx')\,P_2 + (x'y - xy')\,P_3 = 0\,. \qquad (35)$$

Dadurch ist aber nach (22) ein *linearer Strahlenkomplex* oder *ein Nullsystem* definiert, wenn (vgl. (20)) nicht

$$\mathfrak{M}\mathfrak{P} = M_1P_1 + M_2P_2 + M_3P_3 = 0 \qquad (36)$$

ist. Wenn (36) besteht, so ist der Komplex ein spezieller: er besteht aus allen Geraden, die die Gerade mit den Koordinaten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ treffen. Ist also die Invariante $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ des Vektorsystems von Null verschieden, so liegt ein Nullsystem vor; ω' ist für O' die Nullebene, alle Strahlen durch den Nullpunkt, welche in ω' liegen, sind Komplexstrahlen oder Nullinien. Nun ist auch die Bezeichnung „Nullebene", „Nullinie" verständlich: $\mathfrak{M}'$ hat nach den Nullinien durch O' die Komponente *Null*.

Errichtet man andererseits bei der kinematischen Auffassung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ in jedem Punkt $O'(\mathfrak{s})$ des Raumes die Ebene senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$, und ist wieder $\mathfrak{r}$ ein Punkt dieser Ebene, so hat man wie oben

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{s})\,\mathfrak{v} = 0, \qquad (37)$$

wobei nach $\mathfrak{v} = \mathfrak{M} - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P})$ d. h. $= \mathfrak{M}'$ ist. Darum fließt aus (37) die Gleichung (33), wodurch das Nullsystem definiert war. Man erhält

also dasselbe Nullsystem. Die Eigenschaften des Nullsystems hat *A. F. Möbius*, von dem auch der Name herrührt, in Crelle's Journ. 10 (1833) S. 317 aufgedeckt, nachdem schon vorher *G. Giorgini*, von mechanischen Betrachtungen der oben geschilderten Art ausgehend, zu derselben Reziprozität gelangt war. Der *lineare Strahlenkomplex* (also das Liniengebilde, das im Nullsystem enthalten ist) erscheint zuerst bei *J. Plücker*, Proc. R. Soc. London 14 (1865), S. 53—58.

3. Zentralachse eines Vektorsystems

Wir zeigen nun, daß für ein Vektorsystem, in dem $\mathfrak{P} \neq 0$ ist, eine Gerade A parallel zu $\mathfrak{P}$ derart existiert, daß für einen beliebigen Bezugspunkt $O'(\mathfrak{s})$ auf A das resultierende Moment $\mathfrak{M}$ (wie natürlich auch $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$) auf A liegt. Wir suchen also den Vektor $\mathfrak{s}$ in (I) so zu bestimmen, daß

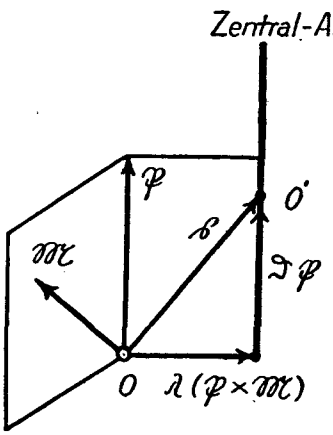

Fig. 105

$$\mathfrak{M}' = a\mathfrak{P} \tag{38}$$

ist, wo a ein Skalar ist. Aus (I) und (38) folgt

$$\mathfrak{s} \times \mathfrak{P} = \mathfrak{M} - a\mathfrak{P}\,. \tag{39}$$

Die rechte Seite stellt einen Vektor dar, der in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{M}, \mathfrak{P}$ liegt, wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ nicht schon in derselben Geraden liegen; denn sonst wäre diese Gerade bereits die gesuchte. Der Vektor auf der linken Seite von (39) liegt daher auch in der Ebene $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$. Nach der Bedeutung von $\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}$ ist dies nur möglich (Fig. 105), wenn die Ebene $\mathfrak{s}, \mathfrak{P}$ auf der Ebene $\mathfrak{M}, \mathfrak{P}$ senkrecht steht. Man kann daher

$$\mathfrak{s} = \lambda\,(\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}) + \vartheta\mathfrak{P} \tag{40}$$

setzen, wo λ und ϑ Skalare sind. Setzt man aus (40) $\mathfrak{s}$ in (39) ein, so folgt

$$\lambda\,(\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}) \times \mathfrak{P} = \mathfrak{M} - a\mathfrak{P}\,,$$

$$\lambda\left\{\mathfrak{M}P^2 - \mathfrak{P}\,(\mathfrak{M}\mathfrak{P})\right\} = \mathfrak{M} - a\mathfrak{P}\,,$$

$$\mathfrak{M}(\lambda P^2 - 1) = \mathfrak{P}\left\{\lambda\,(\mathfrak{M}\mathfrak{P}) - a\right\},$$

oder, da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ verschiedene Richtungen haben, also linear unabhängig sind

$$\lambda P^2 - 1 = 0\,, \qquad \lambda\,(\mathfrak{M}\mathfrak{P}) - a = 0\,,$$

$$\lambda = \frac{1}{P^2}\,, \qquad a = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{P}}{P^2}\,.$$

Nach (38) und (40) hat man also

$$\boxed{\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}}{P^2} + \vartheta \mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{M}' = \frac{(\mathfrak{M}\mathfrak{P})\,\mathfrak{P}}{P^2}.} \tag{III}$$

ϑ bleibt willkürlich. Die erste Gleichung stellt die Gerade A dar, welche die *Zentralachse des Vektorsystems* heißt (Achse des Nullsystems, des linearen Komplexes). Der Punkt

$$\mathfrak{s}_0 = \frac{\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}}{P^2}$$

ist der Fußpunkt des vom Bezugspunkt O auf die Zentralachse gefällten Lotes. Dies folgt unmittelbar aus Fig. 105.

Die zweite Formel (III) bestätigt die Invarianz von $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$. Deutet man $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ als Drehvektor bzw. Translationsvektor für ein starres System, so gibt die Zentralachse die Schraubenachse der Bewegung. Die Größe

$$p = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{P}}{P^2}, \tag{41}$$

welche dem absoluten Betrag nach wegen (III) gleich $|\mathfrak{M}'| : |\mathfrak{P}|$ ist, heißt *der Parameter des Nullsystems oder der Schraube*. Diese Invariante p gibt (absolut genommen) *das Verhältnis* der *Translationsgeschwindigkeit* $|\mathfrak{M}'|$ *zur Rotationsgeschwindigkeit* $|\mathfrak{P}|$ bezüglich der Schraubenachse. Ist $\mathfrak{M}\mathfrak{P} > 0$, so hat $\mathfrak{M}'$ dieselbe Richtung wie $\mathfrak{P}$: das Nullsystem heißt rechtsgewunden. Ist $\mathfrak{M}\mathfrak{P} < 0$, so ist es linksgewunden. Ist $\mathfrak{M}\mathfrak{P} = 0$, so ist die erste Formel (III), abgesehen von der Bezeichnung, mit (6) identisch, und *die Zentralachse hat die Linienkoordinaten* $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$. Der Komplex (35) ist ein *spezieller* (s. oben); er besteht aus allen Geraden, welche die Gerade $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$, d. h. die Zentralachse treffen. Dies geht auch aus der zweiten Formel (III) hervor: $\mathfrak{M}' = 0$ heißt, daß die ganze Bewegung aus einer Rotation um die Zentralachse besteht. Alle Punkte des Raumes beschreiben Kreise, und darum geht die Ebene, die auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ eines Punktes senkrecht steht, durch die Zentralachse, und alle Nullinien treffen die Zentralachse.

4. Nochmals das Nullsystem. Gleichung von Möbius

Wir machen jetzt die Zentralachse zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dann ist

$$P_1 = P_2 = M_1 = M_2 = 0\,.$$

Setzt man

$$\frac{M_3}{P_3} = p, \tag{42}$$

wo also nach (41) p der *Parameter* des Nullsystems ist, so hat man als *Normalform* für die Gleichung des Nullsystems nach (35)

$$\boxed{(x'y - xy') + p\,(z - z') = 0\,.} \tag{IV}$$

Hieraus kann man nun die *Struktur* des Nullsystems oder des linearen Strahlenkomplexes aufs leichteste entnehmen. Die Größe

$$x'y - xy' \tag{43}$$

bedeutet den doppelten Inhalt des Dreiecks OPP', wo O der Ursprung, P der Punkt $(x, y, 0)$ und P' der Punkt $(x', y', 0)$ ist. Dreht man den Raum und mit ihm seine Punkte um einen beliebigen Winkel, so bleibt (43) und $z - z'$ ungeändert, woraus folgt, daß bei dieser Drehung immer ein Komplexstrahl wieder in einen Komplexstrahl übergeht. Weiter bleibt

$$z - z' \qquad \text{und} \qquad x'y - xy'$$

invariant, wenn der Raum eine beliebige Translation parallel zur z-Achse, der Achse des Nullsystems erfährt. Es ergibt sich so der merkwürdige

Satz. Der lineare Strahlenkomplex oder das Nullsystem geht in sich über, wenn man den Raum einer beliebigen Schraubenbewegung unterwirft, wobei die Achse des Nullsystems die Schraubenachse ist.

Deshalb nennt man oft auch nach *R. Sturm* den linearen Komplex das *Strahlengewinde*.

Nun kann jeder Punkt (und seine Nullebene) des Raumes durch eine solche Schraubung in einen Punkt der positiven x-Achse übergeführt werden. Es genügt also, für jeden Punkt P' der positiven x-Achse seine Nullebene anzugeben. Setzt man nun in (IV) $x' = x'$, $x' > 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, so erhält man als Gleichung seiner Nullebene

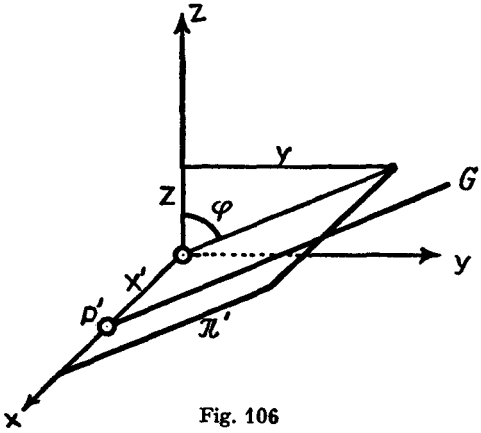

Fig. 106

$$-x' \cdot \frac{y}{z} = p, \tag{44}$$

die durch die x-Achse geht und gegen die z-Achse die Neigung φ hat, wenn

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tg}\varphi = -\frac{p}{x'} \tag{45}$$

ist (Fig. 106). Dabei lehrt der Vergleich von (44) und (45), da $x' > 0$ ist, daß die Nullebene (falls ein Rechtssystem wie immer vorausgesetzt wird) für $p < 0$ durch den ersten und dritten Quadranten, für $p > 0$ durch den zweiten und vierten Quadranten der yz-Ebene hindurchgeht. Für den Fall $x' = 0$, folgt $z = 0$, also die xy-Ebene als Nullebene. Schreibt man statt x' allgemein r, wo r nun der Abstand des Nullpunkts von der Achse ist, so hat man nach (45) die *Gleichung von Möbius*

$$\boxed{r \operatorname{tg}\varphi = -p.} \tag{V}$$

Dabei geht die Nullebene durch den Abstand r des Nullpunkts von der

Achse und der im Nullpunkt stehende und nach der z-Achse schauende Beobachter muß die Ebene durch den Nullpunkt und die Achse im Sinne des Uhrzeigers um den Winkel φ drehen, wenn der Parameter $p < 0$ ist. Für $p > 0$ ist nach (V) φ negativ, und die Drehung erfolgt im andern Sinne. Im ersten Fall ist das Nullsystem linksgewunden (s. oben), im andern Fall rechtsgewunden. Läßt man nun in (V) $x' = r$ wachsen, so nimmt $|\operatorname{tg}\varphi|$ ab, d. h. die Nullebene richtet sich auf. So übersieht man für jeden Punkt der positiven x-Achse die Lage der Nullebene. Nun drehe man die Nullpunkte mit ihren Nullebenen um die z-Achse und verschiebe sie noch parallel zur z-Achse, so erkennt man für jeden Raumpunkt seine Nullebene. Auch die Struktur des linearen Komplexes übersieht man jetzt leicht. Man konstruiere in der Nullebene π' (Fig. 106) des Nullpunkts P' das Lot G auf der x-Achse, dann ist G eine Nullinie, $r = x'$ in (V) ist ihr kürzester Abstand von der Achse und φ ihr Winkel mit der Achse. Nun werde x' größer, dann richtet sich G auf. So erhält man für jeden Punkt der positiven x-Achse eine Nullinie, also ∞^1. Jetzt drehe man alle Geraden G um die z-Achse und erhält ∞^1 Drehhyperboloide mit ∞^2 Nullinien. Alle diese Hyperboloide werden parallel der z-Achse verschoben, dann hat man die Gesamtheit der ∞^3 Nullinien. Es ist interessant zu sehen, wie ein scheinbar so kompliziertes Gebilde, wie der lineare Strahlenkomplex, der Anschauung zugänglich gemacht werden kann.

§ 41. Die Schraubenachse einer beliebigen Bewegung

Die allgemeinste Bewegung eines starren Systems erhält man, wenn man das System um eine durch den festen Punkt O gehende Achse $\mathfrak{a}$ um den Winkel φ dreht und dann dem System eine Translation $\mathfrak{s}$ erteilt. *Chasles* hat gezeigt, daß man dieselbe Bewegung durch eine Schraubenbewegung um eine Achse $\mathfrak{S}$ herstellen kann. Wir wollen den Satz von *Chasles* beweisen und zugleich die Achse $\mathfrak{S}$ finden.

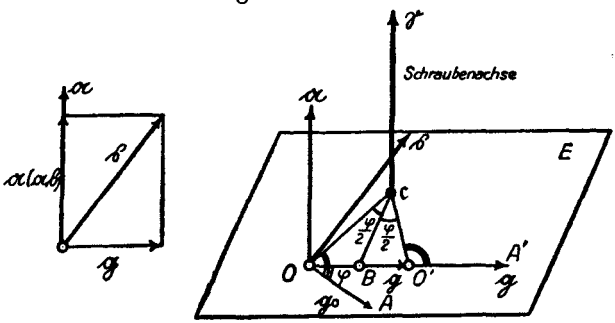

Fig. 107

Um die Lage der Schraubenachse $\mathfrak{S}$ zu finden, zerlegen wir die Translation $\mathfrak{s}$ (Fig. 107 links) in eine Komponente $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$ nach der Achse $\mathfrak{a}$

(Einheitsvektor) und in eine Komponente $\mathfrak{g}$ senkrecht zu ihr. Nun hat man mit dem starren System drei Operationen vorzunehmen:

1. Drehung um die Achse $\mathfrak{a}$ um den Winkel φ,
2. Translation $\mathfrak{g}$ senkrecht zu $\mathfrak{a}$,
3. Translation $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$ parallel zu $\mathfrak{a}$.

Wir zeigen nun, daß die Operationen (1) und (2) durch eine *einzige Drehung* um eine zu $\mathfrak{a}$ parallele Achse $\mathfrak{S}$ ebenfalls um den Winkel φ ausgeführt werden kann. Ist dies gezeigt, und der Schnittpunkt C von $\mathfrak{S}$ mit der durch O senkrecht zu $\mathfrak{a}$ gehenden Ebene E gefunden, so ist der Satz von *Chasles* bewiesen, und die Schraubenachse $\mathfrak{S}$ gefunden. Die Drehung um $\mathfrak{S}$ und die Operation (3) geben dann die Schraubenbewegung.

Die beiden ersten Operationen führen E in sich über. Um nun den sogenannten Drehpol C zu finden, sei $\overrightarrow{OA} = \mathfrak{g}_0$ ein Vektor, der bei der 1. Operation in den Vektor $\mathfrak{g} = \overrightarrow{OO'}$ übergeht; die 2. Operation führt dann $\overrightarrow{OO'}$ in $\overrightarrow{O'A'}$ über. $\overrightarrow{OA}$ geht also durch die Folge der Operationen (1) und (2) in $\overrightarrow{O'A'}$ über. Diese beiden Operationen können aber durch eine einzige Drehung um einen Punkt C ersetzt werden. Dieser Punkt C kann so erhalten werden: Man errichte in der Mitte B von OO' auf OO' in der Ebene E im Sinne der Rotation (1) das Lot und wähle auf ihm den Punkt C so, daß $\sphericalangle\, OCO' = \varphi$ ist. Es ist dann $CO = CO'$, $OA = O'A'$, $\sphericalangle\, COA = \sphericalangle\, CO'A' = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$. Dreht man also um die durch C zu $\mathfrak{a}$ parallele Achse $\mathfrak{S}$ um den Winkel φ, dann kommt OA in die Lage $O'A'$, was gezeigt werden sollte.

Es ist nun

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\mathfrak{g}}{2}, \quad \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{g}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \tag{1}$$

Die zweite Gleichung (1) ist richtig, weil $\overrightarrow{BC}$ senkrecht auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}$ in der vorgeschriebenen Richtung steht, und weil der Betrag von $\overrightarrow{BC} = \left|\frac{\mathfrak{g}}{2}\right| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ ist.

Es ist also

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathfrak{g}}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{g}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \tag{2}$$

Nun ist nach Fig. 107

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{s}),$$

und darum nach (2)

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathfrak{s}}{2} - \frac{\mathfrak{a}}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{s}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Die Schraubenachse hat somit die Gleichung

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{s}}{2} - \frac{\mathfrak{a}}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{s}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{s})\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \lambda\mathfrak{a}, \tag{3}$$

wo λ ein Parameter ist. Wählt man $\lambda = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$, so erhält man nach (3) *in dem Endpunkt des von O ausgehenden Vektors*

$$\boxed{\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{s}}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{s})\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} \tag{I}$$

einen Punkt der Schraubenachse, der der Fußpunkt des kürzesten Abstands von $\mathfrak{S}$ und dem von O ausgehenden Vektor $\mathfrak{s}$ ist, wie man aus (I) erkennt. Durch die Bewegung $\mathfrak{a}, \varphi, \mathfrak{s}$ wird der aus O auslaufende Vektor $\mathfrak{e}$ in den ebenfalls von O ausgehenden Vektor $\mathfrak{e}'$ übergeführt, wobei nach § 34 (V)

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}\cos\varphi + (\mathfrak{a}\times\mathfrak{e})\sin\varphi + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{e})(1-\cos\varphi) + \mathfrak{s} \tag{4}$$

ist. Setzt man den Wert von $\mathfrak{e}$ aus (I) in (4) ein, so liefert eine kleine Rechnung

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s}).$$

Entsprechend wird der Vektor $\mathfrak{e} + \lambda\mathfrak{a}$, der nach einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{S}$ geht, in den Vektor $\mathfrak{e} + \lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$ übergeführt. Jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ erfährt also bei der Gesamtbewegung nur eine Translation $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$ längs $\mathfrak{S}$, womit zur Probe gezeigt ist, daß $\mathfrak{S}$ wirklich die Schraubenachse einer Schraubenbewegung ist.

§ 42. Die Gleichungen dritten und vierten Grads

Aus der Gleichung

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \tag{1}$$

sollen durch Potenzieren die Wurzeln fortgeschafft werden. Erhebt man in die dritte Potenz, so folgt

$$x^3 = u + 3\sqrt[3]{uv}\,(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) + v,$$

oder nach (1)

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{uv} + u + v. \tag{2}$$

Jetzt müßte das Glied $3x\sqrt[3]{uv}$ auf eine Seite gestellt und nochmals mit 3 potenziert werden. Für unsere Zwecke genügt (2), oder

$$x^3 - 3x\sqrt[3]{uv} - (u+v) = 0. \tag{3}$$

Von dieser kubischen Gleichung ist also $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ eine Lösung. Damit ist auch sofort die allgemeine „reduzierte" kubische Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{4}$$

gelöst; denn durch Vergleichen von (3) und (4) folgt

$$3\sqrt[3]{uv} = -a, \qquad u+v = -b,$$

oder

$$uv = -\frac{a^3}{27}, \quad u+v = -b,$$

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}},$$

und durch Einsetzen in (1)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}, \tag{5}$$

womit die *Cardanische Formel* gewonnen ist. Durch diese Methodik ist der sonst übliche Kunstgriff, der den Schülern Schwierigkeit macht, vermieden.

Um zu der Gleichung vierten Grads überzugehen[1]), so sei sie in der reduzierten Form

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{6}$$

gegeben. Die Wurzeln von (6) können nun als Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte

$$y^2 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{7}$$

$$y - x^2 = 0 \tag{8}$$

angesehen werden, von denen der erste, je nach dem Vorzeichen von a, eine Ellipse oder Hyperbel, der zweite eine Parabel ist. Die Gleichung

$$y^2 + ax^2 + bx + c + \lambda(y - x^2) = 0 \tag{9}$$

oder geordnet

$$x^2(a-\lambda) + y^2 + bx + \lambda y + c = 0 \tag{9a}$$

stellt einen Kegelschnitt dar, der durch alle Schnittpunkte von (7) und (8) hindurchgeht, da ein Koordinatenpaar, das (7) und (8) befriedigt, auch (9) bzw. (9a) erfüllt. Wir bestimmen nun λ so, daß der Kegelschnitt (9a) in ein Geradenpaar zerfällt. Die Abszissen der Schnittpunkte dieses Geradenpaares mit der Parabel (8) sind dann die gesuchten Wurzeln von (6). Als Bedingung des Zerfalls erhält man für λ die *Resolvente*

$$\lambda^3 - a\lambda^2 - 4c\lambda + 4ac - b^2 = 0. \tag{10}$$

Sie ist vom dritten Grad, was der geometrischen Tatsache entspricht, daß es durch vier Punkte drei Geradenpaare gibt. Nun löse man (9a) nach x auf und erhält

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a-\lambda)(y^2+\lambda y+c)}}{2(a-\lambda)}.$$

Setzt man unter der Wurzel für b^2 den aus (10) sich ergebenden Wert

[1]) Vgl. auch V. u. K. Kommerell, „Analyt. Geom." I. Tl. 5. Aufl. 1926, S. 219 ff.

ein, so erhält man nach einer einfachen Rechnung

$$x = \frac{-b \pm (2y + \lambda)\sqrt{\lambda - a}}{2(a - \lambda)}. \tag{11}$$

Das ist die Gleichung des der Wurzel λ entsprechenden Geradenpaars: dieses ist mit der Parabel (8) $y = x^2$ zu schneiden, und die vier Abszissen der Schnittpunkte sind die Wurzeln von (6). Setzt man also in (11) für y die Größe x^2, so erhält man die beiden quadratischen Gleichungen in x

$$x = \frac{-b \pm (2x^2 + \lambda)\sqrt{\lambda - a}}{2(a - \lambda)}, \tag{12}$$

welche die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der Gleichung (6) liefern. Der Gang der Lösung ist also folgender: Man berechne aus (10) einen Wert von λ, setze ihn in (12) ein und löse die beiden quadratischen Gleichungen auf. Die Resolvente (10) ist dieselbe, die der *Lagrange*schen Auflösungsmethode der biquadratischen Gleichung zugrunde liegt.

Die Gleichung (9a) kann auch zu einer *graphischen* Lösung von (6) verwendet werden. Setzt man $\lambda = a - 1$, so hat man den Kreis

$$x^2 + y^2 + bx + (a - 1)y + c = 0,$$

die vier Abszissen der Schnittpunkte dieses Kreises mit der Parabel $y = x^2$ liefern die vier Wurzeln von (6).

§ 43. Elementargeometrische Konstruktion des regulären Siebzehnecks

Der erste, der die Konstruktion des regulären 17-Ecks von der *Gauß*schen Theorie unabhängig gemacht hat, war *Padoa*[1]). Die Ableitung der Gleichungen von *Padoa* ist immerhin noch etwas umständlich. Im Folgenden will ich eine Herleitung der *Padoa*schen Gleichungen geben[2]), die ganz elementar ist. Das Gleichungssystem wird so gelöst, daß man zu der eleganten Konstruktion von *Richmond*[3]) gelangt — *Padoa* leitet die Konstruktion von *Serret* ab. Am Schluß wollen wir den Zusammenhang mit der *Gauß*schen Theorie herstellen und das Gleichungssystem so lösen, daß man dieselben quadratischen Gleichungen wie in der klassischen Theorie erhält.

Das Folgende ist eine Verallgemeinerung dessen, was die Konstruktion des regulären Zehn-Ecks liefert und kann auf alle konstruierbaren

[1]) *A. Padoa* Poligoni regolari di 34 lati; Boll. di Mat. 1903. Die Methode von Padoa hat *Enriques* in seinen „Fragen der Elementargeometrie" übers. v. H. Fleischer, II. Tl., 1907, S. 185ff. wiedergegeben.

[2]) Vgl. *K. Kommerell*, Math. Ann. Bd. 72, 1912 „Über die Konstruktion der regulären Polygone S. 588ff. u. *K. Kommerell*, Unterr.-Blätter f. Math. u. Naturwiss. Jahrgg. XVI, 1910, S. 127, *Keferstein*, Zeitschr. f. math.-naturwiss. Unterricht (Hofmann) 40. Jahrgg., 1909, S. 1ff.

[3]) Math. Annal. Bd. 67, 1909, S. 459.

Polygone ausgedehnt werden. Gegeben sei (Fig. 108) das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Spitze in A, und das Mittellot DE auf dem Schenkel AB möge den Schenkel AC in E treffen. Ist nun das Dreieck EBC gleichschenklig, also $BE = BC$, so ergibt sich mit den in der Figur angegebenen Winkeln $5\alpha = \pi$, also $\alpha = \frac{2\pi}{10}$, und das Dreieck ABC ist das Bestimmungsdreieck eines regulären Zehnecks. Nun gehen wir aus von dem gleichschenkligen Dreieck ABC (Fig. 109). Auf AB wird das Mittellot errichtet bis E, auf BE ebenso bis F und auf BF bis G. Ist jetzt $BG = BC$, so ist das Dreieck ABC das Bestimmungsdreieck eines regulären 34-Ecks; denn es ist $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABE = \alpha$, und nach dem Außenwinkelsatz $2\alpha = \sphericalangle BEF = \sphericalangle EBF$ usw., endlich $\sphericalangle BGC = 8\alpha = \sphericalangle BCG = \sphericalangle ABC$, und darum $\sphericalangle GBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABG = 8\alpha - 7\alpha = \alpha$. Bildet man für das Dreieck ABC die Winkelsumme, so ist

$$17\,\alpha = \pi, \quad \alpha = \frac{2\pi}{34},$$

und darum ist das Dreieck ABC ein Bestimmungsdreieck eines regulären 34-Ecks. Mit der in Fig. 109 gebrauchten Bezeichnung erhält man aus $\triangle ABE$ mit Hilfe des Cosinussatzes

$$a^2 = 2b^2 + 2b^2 \cos 2\alpha,$$

aus $\triangle EHF$

$$\cos 2\alpha = \frac{b}{2} : c,$$

und somit $a^2 = 2b^2 + b^3 : c$, oder

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{c}\right) + 2. \tag{1}$$

Ebenso folgt

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right) + 2. \tag{2}$$

Aus $\triangle FBG$ erhält man

$$c^2 = 2d^2 + 2d^2 \cos 8\alpha,$$

und aus $\triangle AKB$, wo K die Mitte von BC ist,

$$\cos 8\alpha = \frac{d}{2} : a,$$

also

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{d}{a}\right) + 2. \tag{3}$$

Endlich ergibt sich aus $\triangle ABC$

$$d^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos\alpha,$$

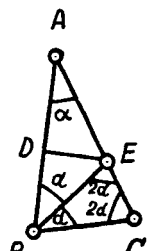

Fig. 108

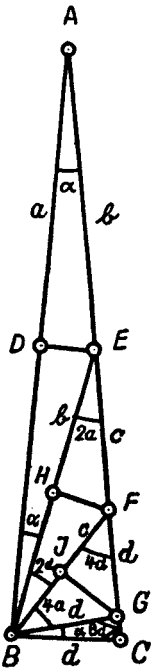

Fig. 109

und aus $\triangle ADE$

$$\cos\alpha = \frac{a}{2} : b,$$

also

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 = -\frac{a}{b} + 2. \tag{4}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} -\frac{a}{b} &= x_1 = -2\cos\alpha, \quad \frac{b}{c} = x_2 = 2\cos 2\alpha, \\ \frac{c}{d} &= x_3 = 2\cos 4\alpha, \quad \frac{d}{a} = x_4 = 2\cos 8\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

so folgt aus (1) und (4) und durch Multiplikation aus (5)

$$\boxed{x_1^2 = x_2 + 2, \quad x_2^2 = x_3 + 2, \quad x_3^2 = x_4 + 2, \quad x_4^2 = x_1 + 2,} \tag{I}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= -1, \\ \alpha &= \frac{\pi}{17}. \end{aligned}} \tag{II}$$

Der Bau der Gleichungen (I) zeigt, daß diejenige algebraische Gleichung, welche (neben andern Wurzeln) die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 besitzt, eine *Abel*sche sein muß, wobei x_1, x_2, x_3, x_4 einen der Zyklen bildet. Wir wollen diese Gleichung sogleich aufstellen. Zuvor sei aber für die spätere Trennung der Wurzeln bemerkt, daß nach (5) x_1 allein von den vier Größen x_i *negativ* und absolut genommen kleiner als 2 ist, und daß

$$|x_1| > x_2 > x_3 > x_4 \tag{6}$$

ist.

Zurückführung von (I) auf eine binomische Gleichung

Zu diesem Zweck setzen wir

$$\begin{aligned} x_1 &= u + \frac{1}{u}, \\ x_2 &= u^2 + \frac{1}{u^2} = x_1^2 - 2, \\ x_3 &= u^4 + \frac{1}{u^4} = x_2^2 - 2, \\ x_4 &= u^8 + \frac{1}{u^8} = x_3^2 - 2, \\ x_1 &= u^{16} + \frac{1}{u^{16}} = x_4^2 - 2, \end{aligned} \tag{7}$$

es ist also

$$u^{16} + \frac{1}{u^{16}} = u + \frac{1}{u}, \quad \text{oder} \quad u^{32} + 1 - u^{17} - u^{15} = 0, \quad \text{oder}$$
$$(u^{17} - 1)(u^{15} - 1) = 0. \tag{8}$$

u genügt also entweder der Gleichung $u^{17} - 1 = 0$ oder der Gleichung

$u^{15}-1$ oder beiden. Die Gleichung (II) gibt die Entscheidung. Nach ihr und (7) folgt

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \left(u+\frac{1}{u}\right)\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)\left(u^4+\frac{1}{u^4}\right)\left(u^8+\frac{1}{u^8}\right) = -1$$

$$= \frac{(u^2+1)(u^4+1)(u^8+1)(u^{16}+1)}{u^{15}}$$

$$= \frac{(1+u^2+u^4+u^6)(1+u^8)(1+u^{16})}{u^{15}}$$

$$= \frac{1+u^2+u^4+u^6+u^8+\ldots+u^{30}}{u^{15}}$$

$$= \frac{1-u^{32}}{u^{15}(1-u^2)} = -1\,.$$

Man hat also

$$u^{32}+u^{17}-u^{15}-1=0\,,$$

oder

$$(u^{17}-1)(u^{15}+1)=0\,. \tag{9}$$

Würde nun u *nicht* der Gleichung $u^{17}-1=0$ genügen, so müßte nach (8) und (9)

$$u^{15}-1=0 \qquad \text{und} \qquad u^{15}+1=0\,,$$

sein, und zwar gleichzeitig, was nicht sein kann. Man hat also den

Satz. Die Größe u, die nach (7) *mit x_1 durch die Gleichung*

$$x_1 = u+\frac{1}{u} \tag{10}$$

verbunden ist, ist eine Wurzel der Gleichung

$$u^{17}-1=0\,, \tag{11}$$

und zwar eine komplexe.

Das Letztere gilt deshalb, weil u nicht $=1$ sein kann; denn x_1 ist nach (5) <0. Damit ist der Zusammenhang mit der *Gauß*schen Theorie *elementar* aufgedeckt. Würde man aus (10) und (11) u eliminieren, was ja leicht geschehen kann, so würde man die *Abel*sche Gleichung erhalten, von der oben die Rede war, und welche durch x_1, x_2, x_3, x_4 befriedigt wird. Sie spielt für das Folgende keine Rolle.

Auflösung des Gleichungssystems (I) *und* (II)

Zieht man in (I) die dritte Gleichung von der ersten und die vierte von der zweiten ab, so folgt:

$$(x_1+x_3)(x_1-x_3) = x_2-x_4\,,$$
$$(x_2+x_4)(x_2-x_4) = x_3-x_1$$

und hieraus durch Multiplikation und unter Weglassung der gleichen Faktoren, die nach (6) von Null verschieden sind,

$$(x_1+x_2)(x_2+x_4) = -1\,. \tag{12}$$

In Übereinstimmung mit (II) und (12) setzen wir nun $(\vartheta < \frac{\pi}{2})$

$$x_2 x_4 = \operatorname{tg}\vartheta\,, \qquad x_1 x_3 = -\operatorname{ctg}\vartheta\,,$$
$$x_1 + x_3 = \operatorname{tg}\varphi\,, \qquad x_2 + x_4 = -\operatorname{ctg}\varphi\,. \tag{13}$$

Jetzt multiplizieren wir die linken und die rechten Seiten der zweiten und vierten Gleichung in (I) und ebenso die der ersten und dritten Gleichung und erhalten dann wegen (13)

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = 2\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\vartheta + 4\,, \tag{14}$$
$$\operatorname{ctg}^2\vartheta = -2\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{tg}\vartheta + 4\,.$$

Andererseits schreiben wir statt (I)

$$(x_1+1)(x_1-1) = x_2+1\,, \qquad (x_2+1)(x_2-1) = x_3+1\,,$$
$$(x_3+1)(x_3-1) = x_4+1\,, \qquad (x_4+1)(x_4-1) = x_1+1\,.$$

Multipliziert man hier die linken und die rechten Seiten und läßt den von Null verschiedenen Faktor

$$(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)(x_4+1)$$

weg, so folgt

$$(x_1-1)(x_3-1)(x_2-1)(x_4-1) - 1 = 0\,,$$

oder nach (13)

$$(-\operatorname{ctg}\vartheta - \operatorname{tg}\varphi + 1)(\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{ctg}\varphi + 1) - 1 = 0\,,$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta + 1 = -\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\vartheta + \operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\vartheta - 1\,,$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta + 1 = -\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\vartheta(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta + 1)\,,$$

oder

$$(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta + 1)(1 + \operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\vartheta) = 0\,. \tag{15}$$

Nehmen wir *zuerst* an, daß hier der zweite Faktor verschwindet, daß also

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{ctg}\vartheta$$

ist, so erhält man durch Elimination von φ aus der letzten Gleichung und (14)

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = -3\operatorname{ctg}\vartheta + 4\,,$$
$$\operatorname{ctg}^2\vartheta = 3\operatorname{tg}\vartheta + 4\,,$$

oder

$$\operatorname{tg}^3\vartheta - 4\operatorname{tg}\vartheta + 3 = 0\,,$$
$$3\operatorname{tg}^3\vartheta + 4\operatorname{tg}^2\vartheta - 1 = 0\,. \tag{16}$$

Diese beiden Gleichungen müßten eine Wurzel $\operatorname{tg}\vartheta$ gemeinsam haben; dies ist aber nicht der Fall. Denn die erste Gleichung besitzt die Wurzel $\operatorname{tg}\vartheta = 1$, die zweite nicht, die zweite die Wurzel $\operatorname{tg}\vartheta = -1$, die erste

aber nicht. Läßt man also in der ersten Gleichung den Faktor $\operatorname{tg}\vartheta - 1$, in der zweiten den Faktor $\operatorname{tg}\vartheta + 1$ weg, so folgt

$$\operatorname{tg}^2\vartheta + \operatorname{tg}\vartheta - 3 = 0\,,$$
$$3\operatorname{tg}^2\vartheta + \operatorname{tg}\vartheta - 1 = 0\,,$$

und durch Abziehen

$$\operatorname{tg}^2\vartheta + 1 = 0\,.$$

Abgesehen davon, daß $\operatorname{tg}\vartheta$ reell sein muß, genügt auch $\operatorname{tg}\vartheta = \pm i$ keiner der beiden letzten Gleichungen.

In der Gleichung (15) muß darum *der erste Faktor*

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta + 1 = 0$$

sein, oder

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1-\operatorname{tg}\vartheta}{1+\operatorname{tg}\vartheta} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\vartheta}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\vartheta}\,, \tag{17}$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right). \tag{18}$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tg}\vartheta = z\,, \tag{19}$$

so ist nach (17)

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1-z}{1+z}.$$

Setzt man aus dieser und der Gleichung (19) die Werte für $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\vartheta$ in (14) ein, so erhält man aus *beiden* Gleichungen

$$z^4 + z^3 - 6z^2 - z + 1 = 0\,. \tag{20}$$

Durch Nullsetzen des ersten Faktors in (15), was auf (17) führte, kommt man also zu keinem Widerspruch wie oben, als der zweite Faktor in (15) gleich Null gesetzt wurde.

Statt (20) schreiben wir nun

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z - \frac{1}{z} - 6 = 0\,,$$

setzen

$$z - \frac{1}{z} = \sigma\,, \quad z^2 + \frac{1}{z^2} = \sigma^2 + 2\,, \tag{21}$$

und erhalten so für σ die Gleichung

$$\sigma^2 + \sigma - 4 = 0\,, \tag{22}$$

womit das Problem eigentlich schon gelöst ist. Das Folgende dient dazu, auf die Konstruktion von *Richmond* zu führen.

Aus (21) und (19) folgt

$$\sigma = \operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{\operatorname{tg}^2\vartheta - 1}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{-2}{\operatorname{tg} 2\vartheta}\,,$$

und jetzt aus (22)

$$\frac{4}{\operatorname{tg}^2 2\vartheta} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\vartheta} - 4 = 0, \quad \text{oder} \quad 2(1 - \operatorname{tg}^2 2\vartheta) = \operatorname{tg} 2\vartheta, \quad \text{oder}$$

$$4 = \frac{2 \operatorname{tg} 2\vartheta}{1 - \operatorname{tg}^2 2\vartheta},$$

oder

$$\operatorname{tg} 4\vartheta = 4.$$

Nach (13), (18) und der letzten Gleichung hat man also

$$\boxed{x_2 x_4 = \operatorname{tg}\vartheta, \quad x_1 + x_3 = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right), \quad \operatorname{tg} 4\vartheta = 4,} \tag{23}$$

Bemerkung. Es erweckt den Anschein, als ob die Gleichung (15) zur Lösung unnötig wäre, da ja durch Elimination von φ aus (14) bereits die Gleichung für $\operatorname{tg}\vartheta = z$ resultiert, nämlich

$$z^8 + 4z^5 - 4z^4 - 20z^3 + 4z^2 + 4z - 1 = 0. \tag{24}$$

Diese ist von höherem Grade als (20). Setzt man wie oben

$$z - \frac{1}{z} = \sigma, \quad z^2 + \frac{1}{z^2} = \sigma^2 + 2, \quad z^3 - \frac{1}{z^3} = \sigma^3 + 3\sigma$$

und dividiert in (24) mit z^3, so folgt

$$\sigma^3 + 4\sigma^2 - \sigma - 12 = 0,$$

eine Gleichung, welche die Wurzel $\sigma = -3$ besitzt. Um diese auszuschließen, haben wir das obige Verfahren vorgezogen. Dividiert man die linke Seite der letzten Gleichung mit $\sigma + 3$, so folgt die Gleichung (22).

Aus den Gleichungen (23) läßt sich nun sehr einfach *die Konstruktion von Richmond* (s. oben) ableiten, die er im Anschluß an die klassische Theorie gegeben hat.

Zunächst wollen wir aber die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} 4\vartheta = 4$$

eingrenzen. Ist ϑ_0 der spitze Winkel $\left(< \frac{\pi}{8}\right)$, der dieser Gleichung genügt, so sind auch die Winkel

$$\vartheta_0 + \frac{\pi}{4}, \quad \vartheta_0 + \frac{2\pi}{4}, \quad \vartheta_0 + \frac{3\pi}{4}, \quad \vartheta_0 + \frac{4\pi}{4}, \quad \vartheta_0 + \frac{5\pi}{4}, \quad \vartheta_0 + \frac{6\pi}{4}, \quad \vartheta_0 + \frac{7\pi}{4}$$

Lösungen der Gleichung. Da nach S. 241 o. $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist, so kommt neben ϑ_0 nur noch $\vartheta_0 + \frac{\pi}{4}$ in Frage. x_1 ist negativ und nach (6) $|x_1| > x_3$, darum ist $x_1 + x_3$ in (23) negativ, oder $\vartheta - \frac{\pi}{4}$ muß im 2. oder 4. Quadranten liegen. Es fällt also der Winkel $\vartheta_0 + \frac{\pi}{4}$ weg. *Darum ist ϑ in* (23) *der spitze aus* $\operatorname{tg} 4\vartheta = 4$ *sich ergebende Winkel.*

Nun ist nach (5)

$$\begin{aligned} &x_1 = -2\cos\alpha = 2\cos 16\alpha; \\ &x_2 = 2\cos 2\alpha; \quad x_3 = 2\cos 4\alpha; \quad x_4 = 2\cos 8\alpha; \\ &\alpha = \frac{\pi}{17}. \end{aligned} \tag{25}$$

Aus (23) und (25) folgt

$$2\cos 2\alpha \cdot 2\cos 8\alpha = 2\cos 6\alpha + 2\cos 10\alpha = \operatorname{tg}\vartheta,$$

$$2\cos 16\alpha + 2\cos 4\alpha = 2\cos 6\alpha \cdot 2\cos 10\alpha = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right), \quad (26)$$

Nun mögen in der Fig. 110 die Punkte A, 2α, 4α, 6α, 8α, 10α sechs aufeinanderfolgende Eckpunkte des regulären 17-Ecks sein, F und G die

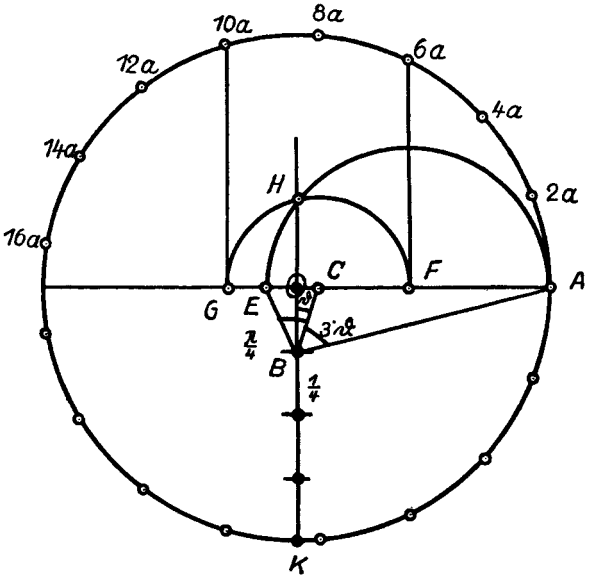

Fig. 110

Projektionen von 6α und 10α auf den Radius OA, so ist, wenn der Radius $= 1$ ist,

$$\cos 10\alpha = -GO,$$

$$\cos 6\alpha = \quad OF.$$

Ist $OB \perp OA$, und $OB = \frac{1}{4}$, so ist $\sphericalangle OBA = 4\vartheta$, da nach (23) $\operatorname{tg} 4\vartheta = 4$ ist. Ist $\sphericalangle OBC = \vartheta$, so ist $OC = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\vartheta$. Aus der ersten Gleichung (26) folgt

$$\frac{\cos 6\alpha + \cos 10\alpha}{2} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\vartheta = OC,$$

und darum ist C die Mitte von GF. Nun lege man an BC in B den Winkel $EBC = \frac{\pi}{4}$ an, dann ist

$$EO = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right).$$

Über EA als Durchmesser beschreibe man den Halbkreis, der BO in H trifft, dann ist

$$OH^2 = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right).$$

Nach der zweiten Gleichung (26) ist aber

$$GO \cdot OF = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right);$$

d. h. der Kreis um C, den Mittelpunkt von GF, mit dem Radius CH schneidet die Punkte F und G aus OA aus. Die Lote in F und G auf OA bestimmen auf dem Kreis die Punkte 6α und 10α. *Dies ist die schöne Konstruktion von Richmond.*

Zusammenhang mit der Gaußschen Theorie.

Die zu lösende Gleichung ist

$$\frac{x^{17}-1}{x-1} = x^{16} + x^{15} + \ldots + x + 1 = 0. \tag{27}$$

Setzt man

$$\beta = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}, \tag{28}$$

so sind

$$\beta^k = \cos\frac{2\pi k}{17} + i\sin\frac{2\pi k}{17}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, 16) \tag{29}$$

die Wurzeln von (27).

$r = 3$ ist *Primitivwurzel der Kongruenz*

$$x^{16} - 1 \equiv 0 \bmod 17;$$

das will sagen, daß die Zahlen

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{15}$$

mit 17 dividiert die Reste 1, 2, 3, ..., 16 geben, nur in anderer Reihenfolge. Darum sind nach (29) die Zahlen

$$\beta^{3^0}, \beta^{3^1}, \beta^{3^2}, \ldots, \beta^{3^{15}}$$

gerade die Wurzeln der Gleichung (27). Es sind die Zahlen

$$\beta^1\beta^3\beta^9\beta^{10}\beta^{13}\beta^5\beta^{15}\beta^{11} \quad | \quad \beta^{16}\beta^{14}\beta^8\beta^7\beta^4\beta^{12}\beta^2\beta^6. \tag{30}$$

Die rechts vom Strich stehenden Wurzeln sind zu den links stehenden die konjugiert komplexen Wurzeln, da sie je ein Produkt $= 1$ geben:

$$\beta^1 \cdot \beta^{16} = \beta^3 \cdot \beta^{14} = \beta^9 \cdot \beta^8 = \ldots = \beta^{17} = 1.$$

In der Reihe (30) überspringt man immer ein Glied und erhält so die beiden *Zyklen*:

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta^3 + \beta^{10} + \beta^5 + \beta^{11} + \beta^{14} + \beta^7 + \beta^{12} + \beta^6, \\ u_2 &= \beta^1 + \beta^9 + \beta^{13} + \beta^{15} + \beta^{16} + \beta^8 + \beta^4 + \beta^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Es ist nun

$$u_1 + u_2 = -1\,, \qquad u_1 u_2 = -4\,, \tag{32}$$

denn $u_1 + u_2$ ist gerade die Summe der Wurzeln von (27) und in den 64 Gliedern von $u_1 \cdot u_2$ kommt jedes Glied von $u_1 + u_2$ genau viermal vor; u_1 und u_2 sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + u - 4 = 0\,. \tag{33}$$

Jetzt zerlegt man jeden Zyklus (31) wieder durch Überspringen in je zwei Unterzyklen:

$$u_{11} = \beta^3 + \beta^5 + \beta^{14} + \beta^{12}\,, \qquad u_{12} = \beta^{10} + \beta^{11} + \beta^7 + \beta^6; \tag{34}$$

$$u_{21} = \beta^1 + \beta^{13} + \beta^{16} + \beta^4\,, \qquad u_{22} = \beta^9 + \beta^{15} + \beta^8 + \beta^2; \tag{35}$$

und findet

$$u_{11} + u_{12} = u_1\,, \qquad u_{11} \cdot u_{12} = -1\,,$$

$$u_{21} + u_{22} = u_2\,, \qquad u_{21} \cdot u_{22} = -1\,.$$

u_{21} und u_{22} sind daher die Wurzeln von

$$u^2 - u u_2 - 1 = 0\,, \tag{36}$$

u_{11} und u_{12} die von

$$u^2 - u u_1 - 1 = 0\,. \tag{37}$$

Für das Folgende genügt es, wenn wir u_{21} in (35) noch in zwei Zyklen zerlegen:

$$u_{211} = \beta^1 + \beta^{16}\,, \qquad u_{212} = \beta^{13} + \beta^4\,. \tag{38}$$

Es ist dann

$$u_{211} + u_{212} = u_{21}\,, \qquad u_{211} \cdot u_{212} = u_{11}\,. \tag{39}$$

u_{211} und u_{212} sind die Wurzeln von

$$u^2 - u \cdot u_{21} + u_{11} = 0\,. \tag{40}$$

Satz. u_{212} ist die Seite des regulären 34-Ecks vom Radius 1.

Denn nach (38) ist

$$u_{212} = \beta^4 + \beta^{-4} = \left(\cos\frac{8\pi}{17} + i\sin\frac{8\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{17} - i\sin\frac{8\pi}{17}\right) = 2\cos\frac{8\pi}{17}$$

und dies ist die Seite des regulären 34-Ecks.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$\beta^k + \beta^{17-k} = 2\cos\frac{2\pi k}{17} = b_k\,, \tag{41}$$

dann ist

$$b_k = b_{17-k}\,.$$

Es ist nun nach (31)

$$u_2 = b_1 + b_2 + b_4 + b_8\,, \tag{42}$$

und nach (5), da $\alpha = \frac{\pi}{17}$ war

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\cos\frac{\pi}{17} = 2\cos\frac{16\pi}{17} = b_8, \\ x_2 &= 2\cos\frac{2\pi}{17} = b_1, \\ x_3 &= 2\cos\frac{4\pi}{17} = b_2, \\ x_4 &= 2\cos\frac{8\pi}{17} = b_4. \end{aligned} \tag{43}$$

Die vier Größen x_1, x_2, x_3, x_4 sind also die Glieder b_8, b_1, b_2, b_4 des Gaußschen Zyklus u_2 in (31).

Andere Auflösung des Gleichungssystems (I) *und* (II)

Wir wollen nun die Gleichungen (I) und (II) so auflösen, daß sich dieselben quadratischen Gleichungen wie bei der Theorie von *Gauß* ergeben. Alle Konstruktionen des regulären 17-Ecks, die sich an die klassische Theorie angeschlossen haben, gelten dann auch jetzt.

Die Gleichung (12) gibt

$$x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_2 + x_3x_4 = -1. \tag{44}$$

Wir suchen nun, für $u_2 = b_1 + b_2 + b_4 + b_8$ oder nach (43) für

$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \Sigma x_1 \tag{45}$$

eine Gleichung zu bilden. Durch Addieren von (I) folgt

$$\Sigma x_1^2 = u_2 + 8. \tag{46}$$

Multipliziert man weiter die Gleichungen (I) der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und addiert sie dann, so erhält man mit Hilfe von (44)

$$\Sigma x_1^3 = -1 + 2u_2. \tag{47}$$

Aus den Potenzsummen Σx_1, Σx_1^2, Σx_1^3 erhält man nach den *Newton*schen Formeln

$$\Sigma x_1x_2 = \frac{u_2^2 - u_2 - 8}{2}, \quad \Sigma x_1x_2x_3 = \frac{u_2^3 - 3u_2^2 - 20u_2 - 2}{6}. \tag{48}$$

Nun multipliziere man die rechten und linken Seiten von (I) und erhält

$$x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = 16 + 8\Sigma x_1 + 4\Sigma x_1x_2 + 2\Sigma x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3x_4.$$

Ersetzt man hier die symmetrischen Funktionen durch ihre aus (II), (45) und (48) sich ergebenden Werte, so folgt

$$u_2^3 + 3u_2^2 - 2u_2 - 8 \equiv (u_2^2 + u_2 - 4)(u_2 + 2) = 0. \tag{49}$$

Der Wert $u_2 = -2$ ist auszuschließen, da nach (5) in der Summe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = u_2$$

x_1 allein negativ, und $|x_1| < 2$ ist. Es ist daher u_2 Wurzel der Gleichung

$$u^2 + u - 4 = 0. \tag{50}$$

Das ist die Gleichung (33), welche die Wurzeln u_1 und und u_2 besaß. Man erhält hieraus

$$u_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \qquad u_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}. \tag{51}$$

Für die Wurzel u_2 war das $+$ Zeichen zu wählen, sonst wäre u_2 negativ, und $|u_2| > 2$, was nicht sein kann. Aus (12) und (45) folgt jetzt

$$\begin{aligned} (x_1 + x_3) + (x_2 + x_4) &= u_2, \\ (x_1 + x_3)\quad (x_2 + x_4) &= -1. \end{aligned} \tag{52}$$

Nach (43), (41) und (35) ist

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= b_3 + b_2 = u_{22}, \\ x_2 + x_4 &= b_1 + b_4 = u_{21}. \end{aligned} \tag{53}$$

Nach (52) sind diese Größen die Wurzeln von

$$u^2 - uu_2 - 1 = 0, \tag{54}$$

welches die Gleichung (36) ist; sie hatte auch die Wurzeln u_{22} und u_{21}. Man hat so

$$\begin{aligned} u_{22} &= x_1 + x_3 = \frac{u_2 - \sqrt{u_2^2+4}}{2}, \\ u_{21} &= x_2 + x_4 = \frac{u_2 + \sqrt{u_2^2+4}}{2}. \end{aligned} \tag{55}$$

Die Zeichen mußten so gewählt werden, da x_1 allein negativ ist, und darum nur $x_1 + x_3$ negativ sein konnte. Es ist nun

$$x_1x_3 + x_2x_4 = \Sigma x_1x_2 - (x_1 + x_3)(x_2 + x_4),$$

also nach (12) und (48)

$$x_1x_3 + x_2x_4 = \frac{u_2^2 - u_2 - 6}{2},$$

oder, da u_2 der Gleichung (50) genügt,

$$x_1x_3 + x_2x_4 = -u_2 - 1.$$

Die andere Wurzel von (50) oder (33) war u_1, also $u_1 + u_2 = -1$, also

$$\begin{aligned} x_1x_3 + x_2x_4 &= u_1, \\ x_1x_3 \cdot x_2x_4 &= -1, \end{aligned} \tag{56}$$

das letztere nach (II). Es ist nun nach (34), (41), (43)

$$\begin{aligned} u_{11} &= b_3 + b_5 = 2\cos\frac{6\pi}{17} + 2\cos\frac{10\pi}{17} = 4\cos\frac{8\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17} = x_2x_4, \\ u_{12} &= b_7 + b_6 = 2\cos\frac{14\pi}{17} + 2\cos\frac{12\pi}{17} = 4\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{16\pi}{17} = x_1x_3; \end{aligned} \tag{57}$$

x_1x_3 und x_2x_4 sind nach (56) die Wurzeln von

$$u^2 - uu_1 - 1 = 0;$$

dies ist die Gleichung (37), der $u_{11} = x_2 x_4$, $u_{12} = x_1 x_3$ (s. (57)) genügten. Man hat so

$$\begin{aligned} u_{12} = x_1 x_3 &= \frac{u_1 - \sqrt{u_1^2 + 4}}{2}, \\ u_{11} = x_2 x_4 &= \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 4}}{2}. \end{aligned} \tag{58}$$

Das Zeichen mußte, wie geschehen, gewählt werden, da x_1 allein negativ ist. Nun ist nach (58) und (55)

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 &= u_{21}, \\ x_2 x_4 &= u_{11}. \end{aligned} \tag{59}$$

Nach (38), (41) und (43) ist

$$u_{211} = x_2, \qquad u_{212} = x_4, \tag{60}$$

und nach (59) sind x_2 und x_4 die Wurzeln der Gleichung (vgl. (40))

$$u^2 - u u_{21} + u_{11} = 0,$$

also

$$\begin{aligned} u_{211} = x_2 &= \frac{u_{21} + \sqrt{u_{21}^2 - 4 u_{11}}}{2}, \\ x_{212} = x_4 &= \frac{u_{21} - \sqrt{u_{21}^2 - 4 u_{11}}}{2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Da nach (6) $x_2 > x_4$ ist, mußte das Zeichen vor der Wurzel, so wie geschehen, gewählt werden. Nach dem Satz S. 246 ist aber $x_4 = u_{212}$ *die Seite des regulären 34-Ecks*. So haben wir dieselben Gleichungen erhalten, wie sie die Theorie von *Gauß* gibt.